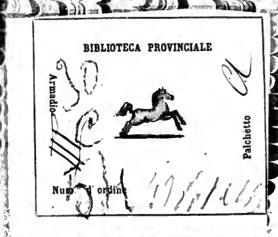
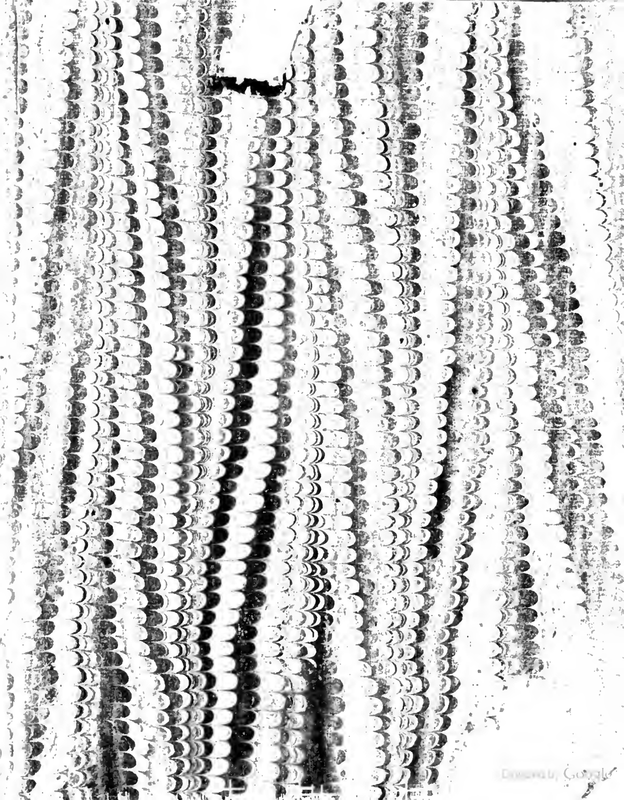



FONDO PROVINCIA


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num. d' ordine



C'est a moi Ignace de Sterlich

ELEMENS
DU
CALCUL INTÉGRAL
SECONDE PARTIE,

PAR LES PP.

LE SEUR, ET JACQUIER,

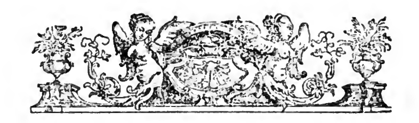
De la Société Royale de Londres, de l'Academie de Berlin, de l'Institut de Boulogne, & Correspondans de l'Academie Royale des Sciences.





A PARME,
Chez les HERITIERS MONTI,
Imprimeurs par Privilege de Son Altesse Royale.

M. DCC. LXVIII.
Avec Approbation.



AVÉRTISSEMENT.

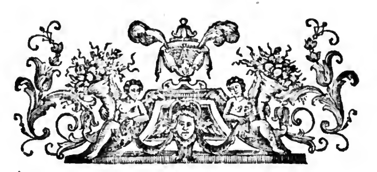
QUoique nous ayons expoſé le plan de nôtre Ouvrage dans la Préface qui eſt à la tête du premier Volume, nous croyons cependant, d'après les reflexions, que nous a communiquées un Sçavant illuſtre, & dont nous réſpectons les conſeils, devoir ajoutér un Avértiſsement à cette ſeconde Partie. Nous avons rendû dans la Premiere en general, les hommages de reſpect dû aux grands Hommes, dont les decouvertes ont enrichi nôtre travail: les noms celebres de M.rs Euler, D'Alembert, Clairaut, Fontaine, de la Grange, de Condorcet, ſont plus d'honneur à ceux

qui les citent, qu'ils n'en font à ces Hommes illuſtres bien ſupérieurs à nos foibles eloges. Si nous n'avons pas honoré plutôt nôtre Ouvrage par des Noms auſſi glorieux, c'eſt par ce que dans les decouvertes, que ces ſçavants Mathematiciens ont faites, nous nous ſommes preſque toujours ecartés de leur forme de demontrér, nous faiſant une loi de ſuivre nos principes, & d'y ramenér ce qui etoit decouvert par les autres. Or il eût eté injuſte dans des choſes, qui nous appartiennent en partie, & qui peuvent être vicieuſes dans la forme, de citér les Inventeurs, aux quels on auroit pû attribuér des fautes, qui etoient a nous. D'ailleurs il eût falû quelques fois entrér dans des altercations trop eloignées de nôtre but, en recherchant les premiers Auteurs d'une decouverte, qui ſont ſouvent très-douteux.

Il reſte à nous diſculper d'une varieté de methodes, dont nous nous ſommes ſervis dans pluſieurs occaſions. Nous avons crû cette diverſité utile,

pour indiquér aux Commençants les différentes roütes dans la recherche de la verité. De plus il nous paroit que parmi les différentes methodes de Calculs, on peut rarement en assignér une, qui soit generalement la plus commode; il faut souvent variér les methodes selon les cas, pour une plus grande facilité.

Enfin la plus grande partie de ce dernier Volume ayant eté imprimé en nôtre absence, nous ne pouvons nous dispensér de renouvellér publiquement nôtre reconnoissance à M.r de Keralio, qui a pris le soin de verifiér nos Calculs, & qui ne nous permettroit pas de le loüér autant que nous l'estimons; il regarderoit nos eloges comme une faute qu'il voudroit corrigér.



ELEMENS
DU
CALCUL INTÉGRAL.

SECONDE PARTIE.

De l'intégration des Différentielles a plusieurs variables.

CHAPITRE PREMIER.

De l'intégration des Différentielles du premier ordre qui contiennent plusieurs variables mêlées, & dont les Intégrales exactes sont des suites finies.

CCCXXVI.

Lorsque les variables d'une différentielle du premier ordre sont separées, on peut toujours en trouver l'intégrale exacte algebriquement, ou par la quadrature des courbes, en cherchant separément par les

methodes de la premiere Partie les intégrales de chacun des termes, dont cette différentielle eſt compoſée, & qui ne renferment qu'une ſeule variable, & en uniſſant ces intégrales particulieres avec leurs ſignes + ou —, pour en former l'intégrale entiere, a laquelle on ajoute la conſtante ſuivant la regle (Art. XIV.). Mais quand les variables ſont mêlées, c'eſt a dire, multipliées, ou diviſées les unes par les autres dans la différentielle qu'on veut intégrer, on a beſoin d'autres methodes, ſoit pour reduire cette différentielle a une autre, dans laquelle les variables ſoient ſeparées, ſoit pour l'intégrer ſans ſeparer auparavant les variables ou les indeterminées. Nous expliquerons dans ce Chapitre les principales methodes pour intégrer, ſans ſeparation de variables, les différentielles du premier ordre, qui naiſſent de la différentiation des quantités exprimées par des ſuites finies, qu'on appelle *fonctions finies*.

CCCXXVII.

Une différentielle de cette ſorte etant propoſée, on peut d'abord eſſayer de l'intégrer en la comparant avec les formules generales de même eſpece, dont on connoît les intégrales par le Calcul différentiel. On ſçait, par exemple, que la différentielle du produit xy eſt $xdy + ydx$, que celle de la fraction $\frac{x}{y}$ eſt

$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ que celle de la puiſſance x^n eſt $nx^{n-1}dx$, que celle du logarithme de x eſt $\frac{dx}{x}$, *&c.*, x & y repreſentent dans ces formules generales des variables quelconques, ſimples ou compoſées, comme on voudra. Donc, ſi la différentielle propoſée peut ſe reduire par ſubſtitution a quelqu'une de ces formules generales de différentielles, on en trouvera tout d'un coup l'intégrale, en faiſant les mêmes ſubſtitutions dans l'intégrale connüe de cette formule generale. C'eſt ainſi qu'en comparant la différentielle $mu^n x^{m-1}dx + nx^m u^{n-1}du$ avec la formule de même eſpece $y\,dx + x\,dy$, on trouve qu'en ſubſtituant u^n pour y, & x^m pour x dans cette formule, elle ſe reduit a la différentielle propoſée; d'où l'on conclût qu'en faiſant les mêmes ſubſtitutions dans xy intégrale de $y\,dx + x\,dy$, on aura $u^n x^m$ pour l'intégrale de $mu^n x^{m-1}dx + nx^m u^{n-1}du$. On voit de même que l'intégrale de la différentielle $\frac{mu^n z^{m-1}dz + nz^m u^{n-1}du}{u^n z^m}$ eſt le logarithme hyperbolique de $z^m u^n$; par ce qu'en ſubſtituant $z^m u^n$ au lieu de x dans la différentielle $\frac{dx}{x}$, on la reduit a la différentielle propoſée; d'où l'on conclut qu'en ſubſtituant auſſi

$z^m u^n$ au lieu de x dans $L. x$, qui eſt l'intégrale de $\frac{dx}{x}$, on aura $L. z^m u^n$ pour l'intégrale de la différentielle propoſée. Il eſt clair qu'on pourroit faire ainſi des Tables de différentielles très-compliquées, par le moyen deſquelles on auroit des intégrales très-difficiles. Mais, quoique ce moyen d'intégration ſoit ſouvent fort utile, ſurtout pour ceux qui ſont fort exercés dans le Calcul différentiel, il n'eſt pas aiſé de l'employer, quand les différentielles qu'on ſe propoſe d'intégrer ne ſont pas reductibles a une forme deja connüe; par ce qu'on n'a point de regle generale & ſûre pour le choix des formules, ny pour les ſubſtitutions. Il faudra alors ſe ſervir des methodes, que nous allons expliquer aprés quelques preparations.

CCCXXVIII.

Une différéntielle quelconque egale a zero ſe nomme *equation différentielle*; & on l'appelle ſimplement *quantité*, ou *fonction différentielle*, lorſqu'on ne la ſuppoſe point egale a zero. Cette diſtinction eſt neceſſaire dans pluſieurs cas; car ſi on différentie une quantité variable, qui n'eſt point en forme d'equation, la différentiation ne pourra faire evanoüir, que les quantités conſtantes, qui ne ſont point mêlées avec les variables. Mais ſi la quantité qu'on différentie eſt en forme d'equation, la

différentiation pourra faire disparoître, outre les constantes, quelque facteur mêlé de variables, qui multiplie, ou divise toute l'equation différentielle. Par exemple, en différentiant la quantité $ax^2 - bx^2y + c$, dans laquelle c est supposée constante, on aura la fonction différentielle $2axdx - 2byxdx - bx^2dy$. Mais, si on suppose $ax^2 - bx^2y + c = o$, & qu'on différentie, on aura l'equation différentielle $2axdx - 2byxdx - bx^2dy = o$, laquelle, etant divisée par le facteur commun & variable x, se reduit a l'equation $2adx - 2bydx - bxdy = o$. De même la fonction différentielle $\frac{axydx + by^2dx - cxy^3dy}{xx + yy}$ etant egalée a zero, & divisée par le facteur commun $\frac{y}{xx + yy}$ devient $axdx + bydx - cxy^2dy = o$.

CCCXXIX.

On appelle *exacte*, ou *complette*, la quantité différentielle, dont l'intégrale est une fonction finie de variables & de constantes; ou bien c'est une différentielle, qui peut naître de la différentiation d'une fonction en termes finis. Ainsi $2axdx - bx^2dy - 2byxdx$ est une différentielle exacte ou complette, par ce que son

intégrale $ax^2 - bx^2y$ eſt une fonction finie, ou par ce qu'on la peut trouver par la différentiation de cette fonction.

CCCXXX.

Suppoſé que A, B, C, D, &c. ſoient des fonctions différentes des variables x, y, z, u, &c., & de conſtantes, l'expreſſion $\frac{(dA)}{dy}$, dans laquelle dA eſt entre deux parentheſes, ſignifie le quotient qu'on trouve en diviſant par dy la différentielle de la fonction A, priſe en ne faiſant varier que y, & en regardant comme conſtantes toutes les autres variables, dont A peut être compoſée. De même $\frac{(dB)}{dx}$, ou $\frac{(dC)}{dz}$ expriment les quotiens qu'on trouve, en diviſant par dx, ou par dz les différentielles dB, ou dC, priſes en ne regardant comme variable, que x, dans la fonction B, ou que z dans la fonction C, & conſiderant toutes les autres variables qui ſont dans B, ou dans C, comme des conſtantes. Suppoſé, par exemple, que $A = ax^my^n$, cette expreſſion $\frac{(dA)}{dy}$ ſignifiera nax^my^{n-1}; ſi $B = x^2y^3z$, l'expreſſion $\frac{(dB)}{dx}$ ſignifiera $2y^3zx$; car la différentielle

de $ax^m y^n$ prise dans la supposition que y seule soit variable, & que x soit constante est $nax^m y^{n-1} dy$, & $\frac{(dA)}{dy} = nax^m y^{n-1}$.

CCCXXXI

LEMME. Supposé que A soit une fonction de deux variables x, & y, & de constantes, & qu'on ait trouvé l'integrale $S. Adx$, en prenant x pour variable & y pour constante; si on différentie de nouveau cette intégrale $S. Adx$, en faisant varier y, traitant x comme constante, la différentielle $d.S.Adx$ sera $dy. \times S. \frac{(dA)}{dy} dx$. Pour donner une idée plus nette de cette proposition, soit $A = x^m y^n$, & $Adx = y^n x^m dx$. L'intégrale $S. Adx$ de la différentielle Adx, en prenant y pour constante, sera $\frac{y^n x^{m+1}}{m+1}$; & la différentielle de cette intégrale, en prenant y pour la seule variable, & x pour constante sera $\frac{nx^{m+1} y^{n-1} dy}{m+1}$. Il faut donc demontrer que cette différentielle est $= dy. S. \frac{(dA)}{dy} dx$, dA etant la différentielle de A prise en faisant varier y, & regardant x comme constante; ce qui est evident dans

cet exemple, puiſque $\frac{(dA)}{dy} = nx^m y^{n-1}$, $\frac{(dA)}{dy} dx = ny^{n-1} x^m dx$, $S.\frac{(dA)}{dy} dx = S.ny^{n-1} x^m dx = \frac{ny^{n-1} x^{m+1}}{m+1}$, en traitant y comme conſtante dans cette intégration. Donc $\frac{nx^{m+1} y^{n-1} dy}{m+1} = dy S.\frac{(dA)}{dy} dx$.

En general la quantité $S. A dx$ etant compoſée de deux variables x & a, en la différentiant tour a tour ſelon x & a, on aura la différentielle totale $A dx + da . S.\frac{(dA)}{da} dx$. Car ſuppoſons que A ſoit l'ordonnée d'une courbe, dont a eſt le parametre, & dx la différentielle de l'abſciſſe; en faiſant varier l'abſciſſe, le parametre demeurant le même, il eſt clair que la différentielle de l'aire ſera $A dx$. Mais ſi on fait enſuite varier le parametre a, l'abſciſſe reſtant la même, il eſt evident que la différentielle $A dx$ ſera augmentée d'une ſeconde différentielle, qui ne peut reſulter que de la variation du parametre a, en différentiant l'ordonnée A. Il faut donc différentier A en faiſant varier a ſeulement, & en multipliant la différentielle, qui en proviendra par la différentielle dx de l'abſciſſe; il eſt clair qu'on aura la ſeconde partie de la différentielle cherchée. Or ſi on différentie A en ne ſuppoſant que a de variable, le coefficient de la différentielle da e-

tant,

tant, aprés la différentiation, $\frac{(dA)}{da}$, on voit par les différentiations precedentes, que la seconde différentielle cherchée sera $S.\frac{(dA)}{da}.dx.da$. Mais, comme la quantité dont on fait varier le parametre est la même dans la même courbe, il est clair que da, qui est variable par rapport a la premiere Partie de la différentielle, sera constante dans la seconde, & par consequent on pourra le mettre hors du signe d'intégration, ce qui changera l'expression precedente en celle-cy, $da.S.\frac{(dA)}{da}dx$. Donc la différentielle totale de $S.Adx$ est $Adx + da.S.\frac{(dA)}{da}dx$. Cette demonstration ne peut avoir aucune difficulté, si on la compare avec les exemples precedents.

On pourroit aussi demontrér ce Lemme d'une autre maniere. Supposons M une fonction de x, de y & de constantes, & soit Adx la différentielle de cette fonction, dans la supposition de y constante. Si on veut avoir la différentielle totale, on supposera qu'elle soit $Adx + Bdy$. Or B doit être tel que $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$ (XXVII.). Donc $dB = \frac{dA}{dy}dx$, & en intégrant dans la supposition de x seule variable, on aura $B = S.\frac{dA}{dy}dx$,

& $B\,dy = dy\,S.\frac{dA}{dy}dx$. Mais $A\,dx$ eſt la différentielle de M, en regardant x ſeule comme variable. Donc la différentielle totale $A\,dx + B\,dy = A\,dx + dy\,S.\frac{dA}{dy}dx$.

CCCXXXII.

THEOREME. 1.° $A\,dx + B\,dy$ etant une quantité différentielle du premier ordre a deux variables x & y, dans laquelle A & B ſont des fonctions de ces deux variables, & de conſtantes; cette différentielle ne peut être exacte, a moins qu'on n'ait l'equation $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$; &, ſi on a cette equation, la différentielle $A\,dx + B\,dy$ ſera exacte.

2.° $A\,dx + B\,dy + C\,dz$ etant une différentielle du premier ordre a trois variables x, y, z, dans laquelle A, B, C repreſentent des fonctions compoſées de ces mêmes variables, & de conſtantes, cette différentielle ne peut être exacte, a moins qu'on n'ait ces trois equations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy}$; & ſi on a ces trois equations, la différentielle $A\,dx + B\,dy + C\,dz$ ſera complette.

3.° $A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du +$ &c. etant une quantité différentielle du premier ordre a tant de va-

riables x, y, z, u, &c. qu'on voudra, dans laquelle A, B, C, D, &c. reprefentent des fonctions compofées de ces mêmes variables, & de conftantes; cette différentielle ne peut être complette, a moins que deux de fes termes quelconques pris a volonté ne faffent toujours une différentielle exacte, en ne regardant comme variables, que les deux feules quantités, dont les différentielles fe trouvent dans ces deux termes, en forte qu'on ait autant d'equations, comme $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, &c., qu'il y a de manieres de combiner les lettres, ou fonctions A, B, C, D, &c. deux a deux; & lorfque ces equations auront lieu, la différentielle $Adx + Bdy + Cdz + Ddu +$ &c. fera complette.

Nous avons demontré (Part. I. Chap. I.) la premiere partie de chacun des cas de ce Theoreme; & la feconde partie, qui eft l'inverfe de la premiere eft renfermée dans le Lemme precedent.

CCCXXXIII.

Probleme. Une quantité différentielle quelconque du premier ordre a tant de variables qu'on voudra, etant propofée, trouver fi elle eft complette, &, lorsqu'elle eft exacte, trouver fon intégrale.

SOLUTION. On cherchera d'abord ſi la différentielle propoſée fournit toutes les equations, qui doivent avoir lieu pour la rendre complette, ſuivant le Theoreme precedent. Si elle ne donne point ces equations, on l'abandonnera; ſi elle les donne, on trouvera ſon intégrale algebrique, ou dependante des quadratures par la methode ſuivante, que nous avons demontrée (Part. I. Chap. I.).

Soit $Adx+Bdy+Cdz+Ddu+$ &c. la quantité différentielle propoſée, qu'on ſuppoſe complette. On prendra (par la Premiere Partie de ces Elemens) l'intégrale $S.Adx$ du premier terme Adx, en ne ſuppoſant de variable, que x, & en regardant comme conſtantes toutes les autres variables y, z, u, &c., qui peuvent ſe trouver dans la fonction A. Enſuite on prendra de même l'intégrale $S.Bdy$ du ſecond terme Bdy, en ne ſuppoſant que y de variable, & traitant toutes les autres quantités comme conſtantes dans la fonction B; & on rejettera de cette intégrale $S.Bdy$ tous les termes qui ſe trouvent deja dans l'intégrale $S.Adx$, & on ajoutera le reſte R a l'intégrale $S.Adx$, pour avoir la ſomme $S.Adx+R$. On continuera a prendre de la même maniere l'intégrale $S.Cdz$, en traitant ſeulement z comme variable, & toutes les autres comme conſtantes; on rejettera encore de cette intégrale $S.Cdz$ tous les termes qui ſe trouvent deja dans

l'intégrale trouvée $S.Adx+R$, & on ajoutera le reste que nous designerons par R' a l'intégrale trouvée $S.Adx+R$, pour avoir $S.Adx+R+R'$. Ayant pris ainsi l'une aprés l'autre les intégrales de tous les termes de la quantité différentielle proposée, on aura son intégrale exacte, a laquelle on pourra ajouter une constante. On s'assûrera qu'on ne s'est point trompé dans l'intégration en différentiant l'intégrale trouvée, & en comparant la différentielle avec la proposée, a laquelle elle doit être egale. Au reste on voit bien qu'on peut commençer & continuer l'intégration par quel terme on voudra, & qu'on doit choisir les termes les plus commodes pour le calcul.

On peut encore abreger quelquefois le calcul en operant de cette maniere. On prend d'abord l'intégrale $S.Adx$ du premier terme, comme nous venons de le dire; ensuite, au lieu de prendre l'intégrale $S.Bdy$ du second terme, on différentie l'intégrale trouvée $S.Adx$ en ne supposant que y de variable, on ôte cette différentielle du second terme Bdy, &, s'il reste quelque chose, on prend l'intégrale de ce reste dans la même supposition, que y seule soit variable, & designant cette intégrale par R, on l'ajoute a la premiere intégrale $S.Adx$, pour avoir la somme $S.Adx+R$, comme dans la premiere methode. Aprés cela, au lieu de prendre l'intégrale $S.Cdz$ du troisieme terme dans

la ſuppoſition que la ſeule z ſoit variable, on différentie la ſomme $S.Adx+R$ dans la même ſuppoſition, on ôte cette différentielle du troiſieme terme Cdz, & s'il reſte quelque choſe, on prend l'intégrale de ce reſte, encore dans la même ſuppoſition de z ſeule variable, & deſignant cette intégrale par R', on l'ajoute a la premiere ſomme $S.Adx+R$, pour avoir la ſeconde ſomme $S.Adx+R+R'$. On continue de la même maniere, juſqu'a ce qu'on ſoit parvenu au dernier terme de la quantité différentielle propoſée; & la derniere ſomme qu'on trouve eſt l'intégrale cherchée, a laquelle on peut ajouter une conſtante. Nous avons deja donné quelques exemples de ce Probleme dans la premiere partie, auxquels nous en ajouterons icy pluſieurs autres, comme en leur propre lieu.

EXEMPLE I. On propoſe la quantité différentielle $axdy+aydx+2bxdx+2cydy=(ay+2bx)dx+(ax+2cy)dy=Adx+bdy$, en faiſant $A=ay+2bx$, & $B=ax+2cy$. La différentielle de A, en ſuppoſant x conſtante, & y variable, eſt ady, par conſequent $\frac{(dA)}{dy}=a$; la différentielle de B, en ſuppoſant y conſtante, & x variable, eſt adx par conſequent $\frac{(dB)}{dx}=a$. Donc $\frac{(dA)}{dy}=\frac{(dB)}{dx}$, & la différentielle propoſée eſt complette. L'intégrale du premier terme Adx,

en ſuppoſant y conſtante, & x variable, eſt $ayx + bxx$; celle du ſecond terme Bdy; en ſuppoſant x conſtante, & y variable, eſt $axy + cyy$, dont il faut rejetter axy, qui ſe trouve deja dans l'intégrale du premier terme $S.Adx$. L'intégrale cherchée ſera donc $ayx + bxx + cyy$, qui eſt exacte, puiſqu'en la différentiant, on retrouve la différentielle propoſée.

On trouve la même intégrale par la ſeconde methode. Car en différentiant l'intégrale $S.Adx$, ou $ayx + bxx$, dans la ſuppoſition que y ſeule ſoit variable, on a la différentielle $axdy$, qui, etant ôtée de Bdy, ou de $axdy + 2cydy$, laiſſe pour reſte $2cydy$, dont l'intégrale eſt cyy; par conſequent l'intégrale de la différentielle propoſée eſt $ayx + bxx + cyy$, comme par l'autre methode.

EXEMPLE II. La quantité différentielle propoſée eſt $\frac{y^4dx - x^2y^2dx + 2x^3ydy}{(xx+yy)^2} = Adx + Bdy$, en faiſant $A = \frac{y^4 - x^2y^2}{(xx+yy)^2}$, & $B = \frac{2x^3y}{(xx+yy)^2}$. On trouve d'abord que cette différentielle eſt exacte, par ce qu'elle donne l'equation $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$. L'intégrale $S.Adx$, en ſuppoſant y conſtante, & x variable, eſt $\frac{xy^2}{xx+yy}$, & en ſuppoſant x conſtante, & y variable, l'intégrale $S.Bdy$

eſt auſſi $\frac{xy^2}{xx+yy}$, qu'on doit rejetter, par ce qu'elle eſt la même que celle du premier terme $S.Adx$. Donc l'intégrale cherchée eſt $\frac{xy^2}{xx+yy}$ par la premiere methode.

Par la ſeconde methode. En différentiant l'intégrale $S.Adx$, ou $\frac{xyy}{xx+yy}$ dans la ſuppoſition de y variable, & de x conſtante, on trouve ſa différentielle $=$ $\frac{2x^3ydy}{(xx+yy)^2}$ la même que Bdy, d'ou l'on conclut que l'intégrale entiere de la différentielle propoſée eſt $\frac{xy^2}{xx+yy}$.

EXEMPLE III. On propoſe la différentielle $dy \times L.x + \frac{ydx}{x} + \frac{aadx}{aa+xx} = Adx + Bdy$, en faiſant $A = \frac{y}{x} + \frac{aa}{aa+xx}$, & $B = L.x$. On trouve que l'equation $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$ a lieu, & par conſequent que la différentielle eſt complette. L'intégrale $S.Adx$ du premier terme, en ne ſuppoſant que x variable, eſt $yL.x + S.\frac{aadx}{aa+xx} = yL.x + N$, N etant un arc de cercle, dont le rayon eſt a, & la tangente x. L'intégrale $S.Bdy$ du ſecond terme priſe dans la ſuppoſition de x conſtante, & de y variable eſt $yL.x$, qu'on doit rejetter,

ter, par ce qu'elle ſe trouve deja dans l'intégrale $S. A dx$. Donc l'intégrale cherchée eſt $y L. x + N$. On trouve la même intégrale par la ſeconde methode.

Exemple IV. Différentielle propoſée

$$\frac{zydx + zxdy + 3az^2y^2dy - xydz}{zz} = Adx + Bdy + Cdz,$$

en faiſant $A = \frac{y}{z}$, $B = \frac{x}{z} + 3ay^2$, $C = -\frac{xy}{zz}$; on trouve les trois equations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{1}{z} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = -\frac{y}{zz} = \frac{(dC)}{ax}$, & $\frac{(dB)}{dz} = -\frac{x}{zz} = \frac{(dC)}{dy}$. La différentielle propoſée eſt donc complette. L'intégrale $S. Adx$, en ſuppoſant y & z conſtantes, eſt $\frac{yx}{z}$; l'intégrale $S. Bdy$, en ne ſuppoſant que y variable, eſt $\frac{xy}{z} + ay^3$, dont il faut rejetter $\frac{xy}{z}$, qui ſe trouve deja dans l'intégrale $S. Adx$, & ecrire la ſomme $\frac{xy}{z} + ay^3$. Enfin l'intégrale $S. Cdz$, dans la ſuppoſition que z ſeule ſoit variable, eſt $\frac{xy}{z}$, qu'il faut encore rejetter, & marquer pour l'intégrale entiere $\frac{xy}{z} + ay^3$.

On la trouve de même par la ſeconde methode. Car ſi on différentie l'intégrale $S. Adx$, ou $\frac{xy}{z}$ en ne

faiſant varier que y, on aura $\frac{xdy}{dz}$, qu'on ôte de Bdy; ou de $\frac{xdy}{z}+3ay^2dy$: il reſte $3ay^2dy$, dont l'intégrale eſt ay^3, qu'on ajoute a la premiere intégrale trouvée $S.Adx$, ou $\frac{xy}{z}$, la ſomme eſt $\frac{xy}{z}+ay^3$. On différentie cette ſomme, dans la ſuppoſition que z ſeule ſoit variable, on trouve $-\frac{yxdz}{zz}$, qu'on ôte de Cdz, & par ce qu'il ne reſte rien, on marque $\frac{xy}{z}+ay^3$ pour l'intégrale cherchée.

EXEMPLE V. On propoſe la différentielle a quatre variables $azdx+3x^2dx+bzdy+2cydy+axdz+bydz+u^2dz+2zudu+3u^2du=Adx+Bdy+Cdz+Ddu$, en ſuppoſant $A=az+3x^2, B=bz+2cy, C=ax+by+uu, D=2zu+3u^2$; on trouve les ſix equations $\frac{(dA)}{dy}=o=\frac{(dB)}{dx}, \frac{(dA)}{dz}=a=\frac{(dC)}{dx}, \frac{(dA)}{du}=o=\frac{(dD)}{dx}, \frac{(dB)}{dz}=b=\frac{(dC)}{dy}, \frac{(dB)}{du}=o=\frac{(dD)}{dy}, \frac{(dC)}{du}=2u=\frac{(dD)}{dz}$; d'ou l'on conclut que la différentielle propoſée eſt exacte. Pour en trouver l'in-

tégrale par la premiere methode, on prendra l'intégrale du premier terme Adx, en ſuppoſant x ſeule variable, & toutes les autres conſtantes, & l'on aura $S.Adx = axx + x^3$. On trouvera, en ſuppoſant y ſeule variable dans B, que $S.Bdy = bzy + cy^2$; & que $S.Cdz = axz + byz + uuz$, en ſuppoſant la ſeule z variable dans Cdz; on rejettera de $S.Cdz$ les termes $axz + byz$, qui ſe trouvent deja dans les premieres intégrales $S.Adx + S.Bdy$, & on ajoutera le reſte u^2z aux autres intégrales, pour avoir la ſomme $azx + x^3 + bzy + cy^2 + u^2z$. Enfin en ſuppoſant que u ſeule ſoit variable dans le dernier terme Ddu, on trouve $S.Ddu = zuu + u^3$, dont il faut rejetter le terme zuu qui ſe trouve dans les intégrales precedentes, & on aura pour l'intégrale cherchée la ſomme $azx + x^3 + bzy + cy^2 + u^2z + u^3$, qui eſt exacte; puiſqu'en la différentiant, on retrouve la différentielle propoſée.

On trouve la même intégrale par la ſeconde methode. Car dans la ſuppoſition, que la ſeule x ſoit variable, on trouve $S.Adx = azx + x^3$, dont la différentielle, en faiſant varier la ſeule y, eſt zero. L'intégrale $S.Bdy$, dans la ſuppoſition que la ſeule y ſoit variable, eſt $bzy + cy^2$. En différentiant la ſomme

$azx + x^3 + bzy + cy^2$, ne faisant varier que z, on a la différentielle $axdz + bydz$, qu'on ôte de Cdz, ou de $axdz + bydz + u^2dz$; il reste u^2dz, dont l'intégrale, dans la supposition de z seule variable, est u^2z, qu'on ajoute a la somme deja trouvée, pour avoir la seconde somme $azx + x^3 + bzy + cy^2 + u^2z$. On différentie cette somme en supposant tout constant, excepté u; & on trouve la différentielle $2zudu$, qu'on retranche de Ddu, ou de $2zudu + 3u^2du$; le reste est $3u^2du$, dont l'intégrale u^3, etant ajoutée a la seconde somme, donne pour l'intégrale cherchée, $azx + x^3 + bzy + cy^2 + u^2z + u^3$, telle qu'on l'avoit trouvée par la premiere methode.

CCCXXXIV.

Il est evident qu'on peut toujours intégrer par les methodes du Probleme precedent l'equation différentielle quelconque du premier ordre $Adx + Bdy + Cdz + Ddu + \&c. = o$, lorsque la quantité différentielle $Adx + Bdy + Cdz + Ddu + \&c.$, qui est egale a zero, est une différentielle exacte, ou qu'elle fournit les equations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dA)}{du} = \frac{(dD)}{dx}$;

&c., qui sont necessaires pour la rendre complette. Mais, si elle ne donne pas ces equations, ou si elle n'est pas complette, lorsqu'on ne la considere pas comme egale a zero; on n'en doit pas conclure qu'elle n'a point d'intégrale exacte, & en termes finis, lorsqu'elle est en forme d'equation, ou qu'on la considere comme egale a zero. Car il pourroit se faire (Art. CCCXXVIII.) qu'elle eût perdu aprés la différentiation un facteur variable, que nous designerons par M, de sorte que, si on retrouvoit ce facteur, & qu'on retablit la différentielle par la multiplication a la forme $MAdx + MBdy + MCdz + MDdu + \&c. = o$, qu'elle avoit avant qu'on l'eût divisée par M, elle deviendroit une différentielle complette d'une fonction finie V composée des variables $x, y, z, u, \&c.$, & de constantes; & pour lors elle donneroit les equations $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}$, $\frac{(d.MA)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dx}$, $\frac{(d.MA)}{du} = \frac{(d.MD)}{dx}$, &c., qui sont necessaires pour qu'elle soit complette, & on auroit $MAdx + MBdy + MCdz + MDdu + \&c. = dV$.

CCCXXXV.

Soit proposée, par exemple, l'equation différentielle $2adx - 2bydx - bxdy = o$, ou $Adx + Bdy = o$; en supposant $A = 2a - 2by$, & $B = -bx$; par con-

fequent $\frac{(dA)}{dy} = -2b$, & $\frac{(dB)}{dx} = -b$, ce qui fait voir que la différentielle $2adx - 2bydx - bxdy$, ou $Adx + Bdy$ n'eſt point exacte. Neantmoins on ne doit pas conclure de la que l'equation $Adx + Bdy = o$ ne puiſſe pas acquerir une forme qui la rende intégrable, en multipliant tous les termes par un facteur variable M, & en la reduiſant a la forme $MAdx + MBdy = o$. Mais ſuppoſé que $MAdx + MBdy$ ſoit une différentielle complette, on aura l'equation $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}$, ou, ce qui revient au même, $\frac{M(dA)}{dy} + \frac{A(dM)}{dy} - \frac{M(dB)}{dx} - \frac{B(dM)}{dx} = o$; equation qui ſera d'une grande utilité pour determiner le facteur M. Car la difficulté eſt reduite a prendre pour M une fonction des variables x, y, & de conſtantes aſſez generale, & avec des expoſans & des coefficiens indeterminés, pour que cette fonction etant ſubſtituée au lieu de M dans l'equation que nous venons de trouver, elle en faſſe evanoüir tous les termes homologues, & fourniſſe des equations particulieres pour determiner les expoſans & les coefficiens indeterminés.

Prenons pour M dans nôtre exemple la fonction $x^m y^n$ avec les expoſans indeterminés m & n, nous aurons $\frac{(dM)}{dy} = n x^m y^{n-1}$, $\frac{(dM)}{dx} = m y^n x^{m-1}$, $\frac{M(dA)}{dy}$

$= - 2bx^m y^n$, & $\frac{B(dM)}{dx} = - bmy^n x^m$. Donc l'equation $\frac{M(dA)}{dy} + \frac{A(dM)}{dy} - \frac{M(dB)}{dx} - \frac{B(dM)}{dx} = o$ deviendra $- 2bx^m y^n + 2anx^m y^{n-1} - 2bnx^m y^n + bx^m y^n + bmy^n x^m = o$, ou $- bx^m y^n - 2bnx^m y^n + bmy^n x^m + 2anx^m y^{n-1} = o$, & egalant a zero tous les termes homologues, on aura ces deux equations $- b - 2bn + bm = o$, & $2an = o$, ce qui donne $n = o$; & $m = 1$; donc le facteur $M = x^m y^n = x$; ainsi l'equation complette sera $2axdx - 2byxdx - bx^2 dy = o$, & en prenant les intégrales de part & d'autre, on aura $ax^2 - bx^2 y = C$ constante.

Si on avoit l'equation différentielle $aydx + bxdy$, qu'on voit par les methodes precedentes n'être pas complette, on trouveroit par le même calcul que cy-devant le facteur $M = x^m y^n = \frac{1}{xy}$, & la différentielle complette, en retablissant le facteur qui avoit disparu par la multiplication, deviendroit $\frac{aydx + bxdy}{xy} = \frac{adx}{x} + \frac{bdy}{y}$, dont l'intégrale exacte est $aL.x + bL.y = L.x^a y^b$. Nous avons rapporté briévement ces exemples aisés de deux facteurs, dont l'un avoit disparu par la division, l'autre

par la multiplication. Mais nous allons eclaircir cette methode importante dans la suite de ce Chapitre.

CCCXXXVI.

Supposé que dans l'equation différentielle a trois variables $Adx + Bdy + Cdz = o$, la quantité $Adx + Bdy + Cdz$ ne soit pas une différentielle complette, & qu'on veüille la rendre exacte, en la multipliant par un facteur variable M; en regardant la chose comme faite, la différentielle $MAdx + MBdy + MCdz$ sera exacte, & donnera par consequent les trois equations $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}$, $\frac{(d.MA)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dx}$, $\frac{(d.MB)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dy}$, ou les trois suivantes

$$\text{I.} \quad \frac{A(dM)}{dy} + \frac{M(dA)}{dy} = \frac{B(d.M)}{dx} + \frac{M(dB)}{dx}$$

$$\text{II.} \quad \frac{A(dM)}{dz} + \frac{M(dA)}{dz} = \frac{C(dM)}{dx} + \frac{M(dC)}{dx}$$

$$\text{III.} \quad \frac{B(dM)}{dz} + \frac{M(dB)}{dz} = \frac{C(dM)}{dy} + \frac{M(dC)}{dy}$$

Par la premiere de ces trois equations on trouve $\frac{(dM)}{dy} = \frac{B(dM)}{Adx} + \frac{M(dB)}{Adx} - \frac{M(dA)}{Ady}$; par la troisieme equation on a $\frac{(dM)}{dy} = \frac{B(dM)}{Cdz} + \frac{M(dB)}{Cdz} - \frac{M(dC)}{Cdy}$, d'ou

d'ou l'on tire $\frac{CB(dM)}{dx} + \frac{CM(dB)}{dx} - \frac{CM(dA)}{dy} = \frac{AB(dM)}{dz} + \frac{AM(dB)}{dz} - \frac{AM(dC)}{dy}$; par la seconde equation on a $\frac{(dM)}{dx} = \frac{A(dM)}{Cdz} + \frac{M(dA)}{Cdz} - \frac{M(dC)}{Cdx}$; en substituant cette valeur de $\frac{(dM)}{dx}$ dans l'equation precedente on trouve $\frac{AB(dM)}{dz} + \frac{BM(dA)}{dz} - \frac{BM(dC)}{dx} + \frac{CM(dB)}{dx} - \frac{CM(dA)}{dy} = \frac{AB(dM)}{dz} + \frac{AM(dB)}{dz} - \frac{AM(dC)}{dy}$; en retranchant de coté & d'autre le terme $\frac{AB(dM)}{dz}$, on a $\frac{BM(dA)}{dz} - \frac{BM(dC)}{dx} + \frac{CM(dB)}{dx} - \frac{CM(dA)}{dy} = \frac{AM(dB)}{dz} - \frac{AM(dC)}{dy}$; & en divisant par M qui se trouve dans tous les termes, on aura l'equation de condition $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{dz} - \frac{B(dA)}{dz} - \frac{A(dC)}{dy} + \frac{C(dA)}{dy} = o$, qui fait connoître la relation que les fonctions A, B, C doivent avoir entr'elles, afin que la proposée $Adx + Bdy + Cdz = o$ soit intégrable; car autrement il sera impossible de trouver le facteur M, qui la rende intégrable. On voit par là qu'il y a une infinité d'equations différentielles a trois

D

variables, qui ne peuvent provenir de la différentiation d'aucune equation en termes finis, & qu'il ne faut pas entreprendre d'intégrer.

CCCXXXVII.

Lors donc qu'on se propose d'intégrer une equation différentielle quelconque a trois variables $Adx + Bdy + Cdz = o$, il faut commencer par examiner si elle donne les trois equations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy}$; si elle les donne, on l'intégrera par le Probleme precedent; si elle ne les donne point, on examinera si elle fournit l'equation de condition $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \&c. = o$; & si cette equation n'a point lieu, on abandonnera la proposée comme impossible; mais si l'equation de condition a lieu, on cherchera le facteur variable M par la methode des indeterminées au moyen des trois equations $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}$, $\frac{(d.MA)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dx}$, $\frac{(d.MB)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dy}$.

CCCXXXVIII.

De même lorsqu'on se propose d'intégrer une equation différentielle a tant de variables qu'on voudra

$Adx + Bdy + Cdz + Ddu + Eds + \&c. = o$; il faut d'abord examiner, comme dans le Probleme precedent, ſi la différentielle $Adx + Bdy + Cdz + \&c.$ eſt exacte, & alors l'intégrer par l'une ou l'autre methode du même Probleme. Si elle n'eſt point complette, pour ſçavoir ſi elle pourra le devenir par la multiplication d'un facteur variable M, on ſuppoſera la choſe faite, ou que la différentielle $MAdx + MBdy + MCdz + MDdu + \&c.$ eſt exacte. Il eſt evident par le Probleme precedent, que dans cette ſuppoſition toutes les différentielles de trois termes $MAdx + MBdy + MCdz$; $MAdx + MBdy + MDdu$; $\&c.$, qu'on peut former en prenant trois termes quelconques dans l'equation propoſée, & multipliés par M feront des différentielles complettes, pourvû qu'on y ſuppoſe conſtantes toutes les lettres, excepté les trois dont les différentielles ſont dans ces trois termes. Donc (Art. CCCXXXVI.) on aura autant d'equations de condition de la même nature que $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{dz} - \frac{B(dA)}{dz} - \frac{A(dC)}{dy} + \frac{C(dA)}{dy} = o$, qu'il y a de manieres de prendre les lettres ou fonctions A, B, C, D, E, $\&c.$ trois a trois; & ſi l'equation différentielle propoſée $Adx + Bdy + Cdz + Ddu + Eds + \&c. = o$, ne donne point toutes ces equations de condition, il ſera impoſſible de trouver le facteur M, & il faudra l'abandonner.

Mais ſi toutes les equations de condition ont lieu, on cherchera M par la methode des indeterminées au moyen des equations $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}$, $\frac{(d.MA)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dx}$, &c.

CCCXXXIX.

Il ne ſera cependant pas neceſſaire d'examiner ſi toutes les equations de condition comme $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \&c. = 0$ ont lieu, par ce que quelques unes de ces equations ſuivent toujours des autres, en ſorte qu'ayant verifié celles-cy, on eſt ſûr de celles qui n'en ſont que des conſequences. Pour le faire voir, prenons l'equation a quatre variables $Adx + Bdy + Cdz + Ddu = 0$, qui par la combinaiſon des quatre lettres A, B, C, D, donne les quatre equations de condition ſuivantes.

La 1.re $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{dz} - \frac{B(dA)}{dz} - \frac{A(dC)}{dy} + \frac{C(dA)}{dy} = 0$, qui eſt tirée de l'equation $Adx + Bdy + Cdz = 0$.

La 2.de $\frac{B(dD)}{dx} - \frac{D(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{du} - \frac{B(dA)}{du} -$

$\frac{A(dD)}{dy}+\frac{D(dA)}{dy}=o$, qui vient de l'equation $Adx+Bdy+Ddu=o$.

La 3.me $\frac{C(dD)}{dx}-\frac{D(dC)}{dx}+\frac{A(dC)}{du}-\frac{C(dA)}{du}-\frac{A(dD)}{dz}+\frac{D(dA)}{dz}=o$, qui vient de l'equation $Adx+Cdz+Ddu=o$.

La 4.me $\frac{C(dD)}{dy}-\frac{D(dC)}{dy}+\frac{B(dC)}{du}-\frac{C(dB)}{du}-\frac{B(dD)}{dz}+\frac{D(dB)}{dz}=o$, tirée de l'equation $Bdy+Cdz+Ddu=o$.

Or il eſt aiſé de voir que, ſi l'on prend a volonté trois de ces equations de condition, la quatrieme en ſera neceſſairement une ſuite. Prenant, par exemple, les trois premieres, on aura par la premiere

$$\frac{(dA)}{dy}=\frac{A(dC)}{Cdy}+\frac{B(dA)}{Cdz}-\frac{A(dB)}{Cdz}+\frac{(dB)}{dx}-\frac{B(dC)}{Cdx}$$

on aura par la ſeconde

$$\frac{(dA)}{dy}=\frac{A(dD)}{Ddy}+\frac{B(dA)}{Ddu}-\frac{A(dB)}{Ddu}+\frac{(dB)}{dx}-\frac{B(dD)}{Ddx}$$

d'ou l'on tire $\frac{DA(dC)}{dy}+\frac{DB(dA)}{dz}-\frac{DA(dB)}{dz}-\frac{DB(dC)}{dx}$

$$=\frac{CA(dD)}{dy}+\frac{CB(dA)}{du}-\frac{CA(dB)}{du}-\frac{CB(dD)}{dx}\text{, ou}$$

$$\frac{BC(dD)}{dx}-\frac{BD(dC)}{dx}=\frac{CA(dD)}{dy}-\frac{DA(dC)}{dy}+\frac{CB(dA)}{du}$$

$-\frac{CA(dB)}{du}-\frac{DB(dA)}{dz}+\frac{DA(dB)}{dz}$. En multipliant tous les termes de la troisieme equation de condition par B, on aura

$$\frac{BC(dD)}{dx}-\frac{BD(dC)}{dx}+\frac{BA(dC)}{du}-\frac{BC(dA)}{du}-\frac{BA(dD)}{dz}+\frac{BD(dA)}{dz}=o,$$

ou

$$\frac{BC(dD)}{dx}-\frac{BD(dC)}{dx}=\frac{BC(dA)}{du}-\frac{BA(dC)}{du}+\frac{BA(dD)}{dz}-\frac{BD(dA)}{dz}$$

on aura donc l'equation

$$\frac{CA(dD)}{dy}-\frac{DA(dC)}{dy}+\frac{CB(dA)}{du}-\frac{CA(dB)}{du}-\frac{DB(dA)}{dz}+\frac{DA(dB)}{dz}=\frac{BC(dA)}{du}-\frac{BA(dC)}{du}+\frac{BA(dD)}{dz}-\frac{BD(dA)}{dz}$$

ou

$$\frac{CA(dD)}{dy}-\frac{DA(dC)}{dy}-\frac{CA(dB)}{du}+\frac{DA(dB)}{dz}=-\frac{BA(dC)}{du}+\frac{BA(dD)}{dz}$$

ou en divisant par A, & rangeant les termes

$$\frac{C(dD)}{dy}-\frac{D(dC)}{dy}+\frac{B(dC)}{du}-\frac{C(dB)}{du}-\frac{B(dD)}{dz}+\frac{D(dB)}{dz}=o,$$ qui est la quatrieme equation de condition.

CCCXL.

Donc lorſqu'on voudra ſçavoir ſi l'intégration d'une equation différentielle a quatre variables eſt poſſible. Il ne faudra examiner que trois des equations de condition qu'elle donne. On prouve de la même maniere que des dix equations de condition que donne une equation différentielle a cinq variables, il ſuffira d'en verifier ſix, pour determiner ſi l'equation différentielle propoſée eſt poſſible; que des vingt equations de condition que donne une equation différentielle a ſix variables. Il ſuffira d'en examiner dix, & en general on trouve que, le nombre des variables etant n, le nombre des equations de condition neceſſaires eſt $\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.}{2}$.

CCCXLI.

Lorſqu'on aura trouvé que l'equation différentielle propoſée $A dx + B dy + C dz + \&c. = o$ eſt poſſible, ou qu'elle donne toutes les equations de condition neceſſaires, pour qu'etant multipliée par un facteur variable M, elle puiſſe devenir une différentielle complette; il faudra prendre pour M une fonction generale compoſée de toutes les variables de la différentielle propoſée avec des coefficiens & des expoſans indeterminés, qu'on determinera enſuite par le ſecours des equations $\frac{(d.MA)}{dy}$

$= \frac{(d.MB)}{dx}$; $\frac{(d.MA)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dx}$; $\frac{(d.MB)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dy}$; *&c.* reduites aux equations developpées $\frac{M(dA)}{dy} + \frac{A(dM)}{dy} = \frac{M(dB)}{dx} + \frac{B(dM)}{dx}$; $\frac{M(dA)}{dz} + \frac{A(dM)}{dz} = \frac{M(dC)}{dx} + \frac{C(dM)}{dx}$; *&c.* Mais il feroit inutile d'employer toutes ces equations, dont le nombre feroit celui des différentes manieres, dont les lettres A, B, C, D, *&c.* peuvent être prifes deux a deux; il n'en faudra employer que le nombre qui eft d'une unité moindre que celui des variables de l'equation propofée.

Car fi l'equation différentielle $Adx + Bdy + Cdz = o$, qui contient trois variables eft poffible, elle donnera les trois equations $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}$; $\frac{(d.MA)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dx}$; $\frac{(d.MB)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dy}$, ou deux feulement de ces equations avec la troifieme equation de condition $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{dz}$ — *&c.* $= o$, qui eft une fuite neceffaire des trois premieres (Art. CCCXXXVI.); enforte que deux equations quelconques des trois $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}$; $\frac{(d.MA)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dx}$; $\frac{(d.MB)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dy}$ renferment neceffairement la troifieme, & qu'il feroit par confequent inutile

tile d'employer plus de deux de ces trois equations pour determiner le facteur M.

De même, si l'equation différentielle $A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du = o$, qui contient quatre variables, est possible, elle donnera six equations $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}$; $\frac{(d.MA)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dx}$; &c., & trois equations de condition, comme $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{dz} -$ &c. $= o$, qui sont chacune une suite necessaire de deux des autres six equations, ensorte qu'il seroit inutile d'employer plus de trois de ces six equations pour determiner le facteur M. On prouve de la même maniere, que, si l'equation différentielle proposée a cinq variables, est possible, on n'aura besoin que de quatre equations de la forme $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}$ pour determiner M, & on trouve en general, que le nombre de ces sortes d'equations necessaires pour determiner M, est d'une unité moindre que celui des variables de l'equation proposée.

CCCXLII.

Quant a la forme a donner au facteur M, nous ne connoissons point de methode generale pour la trouver; mais on pourra toujours en venir a bout dans les cas particuliers, en essayant, comme on a fait

(Art. CCCXXXV.). On reuſſira dans un grand nombre de cas par la methode ſuivante. Il faudra prendre pour M une fraction $\frac{1}{R}$, dont le denominateur R ſoit une fonction poſitive, ou ſans diviſeur variable, d'un degré au deſſus des fonctions A, B, C, D, &c., dans laquelle ſoient toutes les quantités, dont ces fonctions ſont compoſées, avec des coefficiens indeterminés. Cette regle eſt fondée ſur deux remarques qui derivent de la différentiation des quantités. On obſerve en premier lieu que la pluſpart des fonctions, qui n'ont pas un certain facteur commun a tous leurs termes, n'ont pas non plus ce même facteur commun a leurs différentielles; d'où l'on conclut que dans le grand nombre de cas, ou cette remarque a lieu, la différentielle $MAdx + MBdy + MCdz +$ &c., qui a le facteur commun M a tous ſes termes, l'aura auſſi a ſon intégrale, que nous deſignerons par V; puiſque, ſi M n'etoit point un facteur commun a tous les termes de la fonction V, il ne feroit pas non plus un facteur commun a tous les termes de la différentielle dV, ou de $MAdx + MBdy + MCdz +$ &c. On a remarqué en ſecond lieu, que, ſi une fonction a un denominateur variable, la différentielle de cette fonction aura auſſi un denominateur, qui ſera un multiple de celui de l'intégrale. Ainſi la fonction $\frac{x}{y}$ ayant le denominateur variable y, ſa diffé-

rentielle $\frac{ydx-xdy}{yy}$ a auſſi le denominateur yy multiple de y. Donc, ſi, en ſuppoſant ces deux remarques, on met au lieu du facteur M la quantité $\frac{P}{Q}$, dans laquelle P & Q ſont deux fonctions poſitives; P ſera, par la premiere remarque, un facteur commun de la fonction V, dont la différentielle $dV = \frac{P}{Q}Adx + \frac{P}{Q}Bdy + \frac{P}{Q}Cdz + \&c.$, & Q contiendra, par la ſeconde remarque, le denominateur de la fonction V. Si l'on imagine donc que la différentielle $\frac{P}{Q}Adx + \frac{P}{Q}Bdy + \frac{P}{Q}Cdz + \&c.$ ſoit diviſée par ſon intégrale V, P diſparoitra du numerateur, & Q ſe diviſera par le denominateur de l'intégrale, de maniere, qu'il ne reſtera aprés la diviſion, qu'une fonction R d'un degré de plus, que celui de A, B, C, &c.; car la quantité $\frac{Adx + Bdy + Cdz + \&c.}{R}$, qui provient de cette diviſion, eſt egale a $\frac{dV}{V}$, ou a la différentielle du logarithme de la fonction cherchée V, & par conſequent elle doit être d'un degré au deſſous de l'unité comme dans la fraction $\frac{V^0}{V^1} = \frac{1}{V}$; la fonction V^1 eſt d'un degré au deſſus de

V°, & V° d'un degré au dessous de V^{I}. Mais, par ce que $\frac{dV}{V}$, ou $d.L.V$ est la différentielle d'une fonction $L.V.$, il s'ensuit que le Theoreme (Art. CCCXXXII.) a toujours lieu, & qu'a la place de M on peut mettre $\frac{1}{R}$ dans les equations que donne ce Theoreme, R etant la fonction positive la plus generale d'un degré d'une unité de plus que $A, B, C, D,$ &c. avec des coefficiens indeterminés, &, s'il y a des radicaux dans $A, B, C,$ &c., il faudra aussi qu'ils entrent dans R en se combinant avec $x, y, z,$ &c. de toutes les manieres possibles. Au lieu donc des equations $\frac{M(dA)}{dy} + \frac{A(dM)}{dy} = \frac{M(dB)}{dx} + \frac{B(dM)}{dx}$; $\frac{M(dB)}{dz} + \frac{B(dM)}{dz} = \frac{M(dC)}{dy} + \frac{C(dM)}{dy}$; &c. en mettant $\frac{1}{R}$ a la place de M, & $-\frac{dR}{RR}$ a la place de dM, on aura les equations suivantes $\frac{R(dA)}{dy} - \frac{A(dR)}{dy} = \frac{R(dB)}{dx} - \frac{B(dR)}{dx}$; $\frac{R(dB)}{dz} - \frac{B(dR)}{dz} = \frac{R(dC)}{dy} - \frac{C(dR)}{dy}$; &c., car on aura $\frac{M(dA)}{dy} = \frac{(dA)}{Rdy}$; $\frac{A(dM)}{dy} = -\frac{A(dR)}{RRdy}$; $\frac{M(dB)}{dx} = \frac{(dB)}{Rdx}$; & $\frac{B(dM)}{dx} = -\frac{B(dR)}{RRdx}$; par consequent $\frac{(dA)}{Rdy} - \frac{A(dR)}{RRdy} = \frac{(dB)}{Rdx} - \frac{B(dR)}{RRdx}$, & en multipliant

tout par RR, on aura $\frac{R(dA)}{dy} - \frac{A(dR)}{dy} = \frac{R(dB)}{dx} - \frac{B(dR)}{dx}$, & ainſi autres equations.

On determinera par le ſecours de ces equations les coefficiens de R, & par conſequent R même; enſuite on intégrera la différentielle complette $\frac{Adx + Bdy + Cdz + \&c.}{R}$ par le Probleme (Art. CCCXXXIII.), & aprés avoir trouvé cette intégrale on l'egalera a une conſtante, ce qui donnera l'intégrale cherchée. Pour eclaircir cette methode, nous allons l'appliquer a un exemple.

CCCXLIII.

Soit propoſé d'intégrer l'equation $xdx + kydx + mxdy + nydy + pdy = 0$, ou $Adx + Bdy = 0$, en faiſant $A = x + ky$, & $B = mx + ny + p$; puiſque A & B ſont des fonctions d'un degré de x & de y, il faut, ſuivant la methode precedente, prendre pour R la fonction generale de x & de y de deux degrés avec les coefficiens indeterminés b, c, e, f, g, & ſuppoſer $R = x^2 + bxy + cx + ey^2 + fy + g$; on aura par ces ſuppoſitions $\frac{(dA)}{dy} = k$, $\frac{(dB)}{dx} = m$, $\frac{(dR)}{dy} = bx + 2ey + f$, $\frac{(dR)}{dx} = 2x + by + c$.

Subſtituant ces quatre quantités dans l'equation $\frac{R(dA)}{dy} - \frac{A(dR)}{dy} - \frac{R(dB)}{dx} + \frac{B(dR)}{dx} = o$, on aura les valeurs ſuivantes

$$\frac{R(dA)}{dy} = kx^2 + kbxy + kcx + key^2 + kfy + kg$$

$$-\frac{A(dR)}{dy} = -bx^2 \begin{array}{l} -2exy \\ -kbxy \end{array} - fx - 2key^2 - kfy$$

$$-\frac{R(dB)}{dx} = -mx^2 - mbxy - mcx - mey^2 - mfy - mg$$

$$+\frac{B(dR)}{dx} = 2mx^2 \begin{array}{l} +mbxy + mcx \\ +2nxy + 2px \end{array} + nby^2 \begin{array}{l} +ncy \\ +pby \end{array} + pc$$

$$\text{Somme..} \left\{ \begin{array}{llllll} kx^2 & +2nxy & +kcx & +nby^2 & +ncy & +kg \\ +m & -2e & -f & -me & +pb & -mg \\ -b & & +2p & -ke & -mf & +pc \end{array} \right\} = o$$

equation dans laquelle faiſant chaque terme $= o$, on aura ſix equations du premier degré, $k + m - b = o$, $2n - 2e = o$, $kc - f + 2p = o$, $nb - me - ke = o$, $xc + pb - mf = o$, $kg - mg + pc = o$, qui donneront les coefficiens $b = k + m$, $c = \frac{pk - pm}{km - n}$, $e = n$,

$f = \frac{pk^2 + pkm - 2pn}{km - n}$, $g = -\frac{pp}{km - n}$, qu'il faudra ſubſtituer dans la valeur de R, ou dans $x^2 + bxy + cx + \&c.$, & enſuite celle de R etant ſubſtituée dans $\frac{Adx + Bdy}{R}$, on aura

$$\frac{(x+ky)dx+(mx+ny+p)dy}{x^2+(k+m)xy+\frac{pk-pm}{km-n}x+ny^2+\frac{pk^2+pkm-2pn}{km-n}y-\frac{p^2}{km-n}}=$$

$\frac{Adx}{R}+\frac{Bdy}{R}$, différentielle qu'on intégrera par le Probleme (Art. CCCXXXIV.), & dont l'intégrale etant egalée a une conſtante, ſera l'equation intégrale de la propoſée.

Pour intégrer la différentielle precedente, ou $\frac{Adx}{R}$ $+\frac{Bdy}{R}$ ſuivant le Probleme cité, on prendra d'abord l'intégrale du premier terme $\frac{Adx}{R}$ en traitant la ſeule x comme variable, & y comme conſtante. Enſuite on prendra l'intégrale du ſecond terme $\frac{Bdy}{R}$, en regardant y ſeulement comme variable, & x comme conſtante, & on retranchera la premiere intégrale de la ſeconde; ou bien, aprés avoir trouvé la premiere intégrale, on la différenciera en ſuppoſant y ſeule variable, & x conſtante, & on retranchera cette différentielle de $\frac{Bdy}{R}$, & on fera le reſte, comme il eſt preſcrit dans le même Probleme.

Or ſi on ſuppoſe y conſtante dans la différentielle $\frac{Adx}{R}$, & qu'on faſſe $ky=a$, $(k+m)y+\frac{pk-pm}{km-n}=b$,

& $ny^2 + \frac{pk^2+pkm-2pn}{km-n}y - \frac{p^2}{km-n} = q$, on aura $\frac{Adx}{R} = \frac{(x+a)dx}{xx+bx+q}$, en regardant a, b, q comme des constantes, & cette différentielle etant rationelle, on l'intégrera facilement (Part. I. Chap. IV.).

Le denominateur $xx+bx+q$ a pour facteurs $x+\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}bb-q}$, & $x+\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}bb-q}$, de sorte qu'en supposant le premier facteur $=x+r$, & le second $=x+t$, la différentielle sera $\frac{x+a}{(x+r)(x+t)}dx$ $= \frac{r-a}{(r-t)(x+r)}dx + \frac{a-t}{(r-t)(x+t)}dx$, dont l'intégrale est $\frac{r-a}{r-t}L.\overline{x+r} + \frac{a-t}{r-t}L.\overline{x+t}$; or $\frac{r-a}{r-t} =$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{4}bb-q}+\frac{1}{2}b-a}{2\sqrt{\frac{1}{4}bb-q}} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}b-a}{2\sqrt{\frac{1}{4}bb-q}},\ \&\ \frac{a-t}{r-t} =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{4}bb-q}-\frac{1}{2}b+a}{2\sqrt{\frac{1}{4}bb-q}} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}b-a}{2\sqrt{\frac{1}{4}bb-q}};$$ donc l'intégrale precedente sera $\left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}b-a}{2\sqrt{\frac{1}{4}bb-q}}\right) \times$

$$L.\overline{x+\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}bb-q}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}b-a}{2\sqrt{\frac{1}{4}bb-q}}\right) \times$$

L.

$L.\overline{x + \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - q}}$. En fubftituant dans cette intégrale les valeurs de a, b, q, elle devient

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}k}{\sqrt{(k+m)^2 - 4n}}\right) \times$$

$$L.\overline{x + \frac{k+m}{2}y + \frac{p(k-m)}{2km-2n} + \frac{1}{2}\left(y - \frac{p}{km-n}\right)\sqrt{(k+m)^2 - 4n}}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}k}{\sqrt{(k+m)^2 - 4n}}\right) \times$$

$$L.\overline{x + \frac{k+m}{2}y + \frac{p(k-m)}{2km-2n} - \frac{1}{2}\left(y - \frac{p}{km-n}\right)\sqrt{(k+m)^2 - 4n}}$$

cette quantité etant egalée a une conftante fera l'intégrale complette de l'equation différentielle propofée $(x + ky)\,dx + (mx + ny + p)\,dy = o$; car fi l'on prend fa différentielle, & qu'on l'egale enfuite a zero, on retrouve cette equation.

Nous avons choifi pour exemple cette equation différentielle, qu'on voit aifément être la plus generale de fon degré. Car fi l'on avoit propofée l'equation $(az + by + c)\,dz + (ez + fy + g)\,dy = o$, en divifant par a, on auroit eû $\left(z + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}\right)dz + \left(\frac{e}{a}z + \frac{f}{a}y + a\frac{g}{a}\right)dy = o$; en faifant $z + \frac{c}{a} = x$, ou $z = x$

$-\frac{c}{a}$, & $dz = dx$, on auroit trouvé $(x + \frac{b}{a}y)dx +$ $(\frac{e}{a}x - \frac{ce}{aa} + \frac{f}{a}y + \frac{g}{a})dy = o$, & en ſuppoſant $\frac{b}{a} = k$, $\frac{e}{a} = m$, $\frac{f}{a} = n$, $\frac{g}{a} - \frac{ce}{aa} = p$, on auroit $(x + ky)dx + (mx + ny + p)dy = o$.

CCCXLIV.

Il arrive ſouvent que les equations particulieres font connoître aiſément la forme du multiplicateur cherché. Pour le faire voir nous reprendrons l'equation generale de condition $\frac{M(dA)}{dy} + \frac{A(dM)}{dy} = \frac{M(dB)}{dx} + \frac{B(dM)}{dx}$; dans laquelle M repreſente le multiplicateur. Suppoſons ſa différentielle $dM = Pdx + Qdy$, P & Q etant des fonctions de x & de y, on aura (Art. CCCXXX.) $\frac{(DM)}{dy} = Q$, & $\frac{(dM)}{dx} = P$; d'où l'on voit, en ſubſtituant dans l'equation precedente, que, pour rendre une différentielle complette, il faut que $\frac{M(dA)}{dy} + AQ = \frac{M(dB)}{dx} + BP$, ou bien $\frac{BP - AQ}{M} = \frac{(dA)}{dy} - \frac{(dB)}{dx}$; laquelle equation ſuffit pour determiner la fonction M dans les cas particuliers. Si on ſuppoſoit $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$,

on auroit $BP-AQ=o$, & par consequent $P=o$, $Q=o$. Donc $Pdx+Qdy=dM=o$, c'est a dire la différentielle de $M=o$, d'ou il s'ensuit que le facteur M peut être l'unité, ou une constante quelconque; ce qui est le cas des différentielles complettes. Il est donc evident que, pour rendre une différentielle complette, il ne faut que satisfaire a l'equation de condition precedente, & quoiqu'on n'ait pas de methode generale, comme nous l'avons deja observé, on voit cependant qu'on pourra toujours trouver ce facteur, si l'equation différentielle n'est pas absurde. Il y a même plusieurs cas, dans lesquels cela reussit facilement. Tels sont les cas des différentielles homogenes, & de celles dans lesquelles une des variables ne passe pas le premier degré. Nous donnerons un Exemple de ces dernieres, & nous traiterons fort au long dans la suite des premieres.

CCCXLV.

Soit l'equation différentielle $pdx+qydx+rdy=o$, dans laquelle p,q,r designent des fonctions de x, ensorte que la variable y ne passe point le premier degré. Pour rendre cette différentielle complette, on la comparera avec la forme $Adx+Bdy=o$, ce qui donne $A=p+qy$, & $B=r$; d'ou l'on tire $\frac{(dA)}{dy}=q$, &

$\frac{(dB)}{dx} = \frac{dr}{dx}$. En faisant, comme cy-devant, $dM = Pdx + Qdy$, on aura $\frac{BP - AQ}{M} = q - \frac{dr}{dx} = \frac{rP - (p + qy)Q}{M}$, en substituant a la place de A, B leurs valeurs. Or il est aisé de trouver le facteur M par le moyen de cette equation; car $\frac{BP - AQ}{M}$ etant egal a $q - \frac{dr}{dx}$, c'est a dire, $BP - AQ = \left(q - \frac{dr}{dx}\right)M$, on voit que, $q - \frac{dr}{dx}$ etant une fonction de x seulement, par la nature de la différentielle proposée, on peut supposer M egale a une fonction de x, ensorte que Q devienne $= o$, & $dM = Pdx$, d'ou l'on a $q - \frac{dr}{dx} = \frac{rP}{M}$, & $qdx - dr = \frac{rdM}{M}$. Donc $\frac{dM}{M} = \frac{qdx}{r} - \frac{dr}{r}$, & en intégrant $L.M = S.\frac{qdx}{r} - L.r$; donc $M = \frac{1}{r}e^{S.\frac{qdx}{r}}$, en supposant e le nombre, dont le logarithme hyperbolique est l'unité (Art. XXXIV.). Ce facteur M rendra la différentielle complette, & son intégrale sera $S.\left(\frac{pdx}{r}e^{S.\frac{qdx}{r}}\right) + ye^{S.\frac{qdx}{r}} = C$ constante, comme on le voit en retournant a la différentielle par les regles de la premiere Partie.

On pourra de la même maniere rendre complette l'equation différentielle $py^n dx + qy dx + r dy = o$, avec les mêmes conditions, que dans la precedente, c'est a dire, en supposant p, q, r des fonctions de x seule. Car alors on auroit $A = py^n + qy$, & $B = r$; d'où l'on tire $\frac{(dA)}{dy} = npy^{n-1} + q$, & $\frac{(dB)}{dx} = \frac{dr}{dx}$. Donc en supposant, comme cy-devant, $dM = P dx + Q dy$, on aura $\frac{rP - py^n Q - qyQ}{M} = npy^{n-1} + q - \frac{dr}{dx}$. Soit $M = \varphi y^m$, φ etant une fonction de x seulement, on aura $P = \frac{y^m d\varphi}{dx}$, & $Q = m\varphi y^{m-1}$, & en substituant ces valeurs, on trouve l'equation $\frac{rd\varphi}{\varphi dx} - mpy^{n-1} - mq = npy^{n-1} + q - \frac{dr}{dx}$. Or, pour faire usage de cette equation, il faut faire $n = -m$, elle se change en celle-cy $\frac{rd\varphi}{\varphi dx} = (1-n)q - \frac{dr}{dx}$, ou bien $\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{(1-n)qdx}{r} - \frac{dr}{r}$, &, en intégrant, comme cy-devant, $\varphi = \frac{1}{r} e^{(1-n)S.\frac{qdx}{r}}$. Donc, a cause de $n = -m$, le facteur $M = \varphi y^m$ devient $= \frac{y^{-n}}{r} e^{(1-n)S.\frac{qdx}{r}}$, & l'intégrale $\frac{y^{1-n}}{1-n} e^{(1-n)S.\frac{qdx}{r}} + S.\left(\frac{pdx}{r} e^{(1-n)S.\frac{qdx}{r}}\right) = C$.

Si on fait dans cette intégrale $n=o$, on la reduit au cas precedent. Si $n=1$, la différentielle devient $pydx+qydx+rdy=o$, &, a cause de $1-n=o$, le facteur sera $\frac{1}{ry}$, & l'equation est reduite a cette forme $\frac{pdx+qdx}{r}+\frac{dy}{y}=o$, dont l'intégrale $S.\frac{(p+q)dx}{r}+L.y=C$, comme il est evident. Au reste on pourroit reduire aisément la différentielle $py^n dx+qydx+rdy=o$ a la forme $pdx+qydx+rdy$. Il ne faut pour cela que diviser par y^n, on auroit $pdx+qy^{1-n}dx+ry^{-n}dy=o$, &, en faisant $y^{1-n}=z$, on auroit $(1-n)y^{-n}dy=dz$, & l'equation devient $pdx+qzdx+\frac{1}{1-n}rdz=o$, qui a la même forme que la precedente.

CCCXLVI.

On peut quelquefois simplifier les methodes precedentes, en partageant la différentielle en plusieurs parties intégrables separément. Soit, par exemple, l'equation $Xy^q dy+X'y^{q+1}dx+X''y^r dx=o$, dans laquelle X, X', X'' sont des fonctions quelconques de x, & q, r des exposans quelconques. On eprouvera d'abord le facteur Py^n, P etant une fonction de x, & n un expo-

ſant indeterminé, & pour une plus grande facilité on ſuppoſera $n = -r$, enſorte que le facteur devienne Py^{-r}; on voit qu'il ſuffira de diviſer la différentielle propoſée par y^r, & de conſiderer P comme le facteur. En diviſant de plus par X, & deſignant par Q, Q' les quotiens $\frac{x}{X}$, $\frac{x'}{X}$, la différentielle devient, en la multipliant par le facteur P, $Py^{q-r}dy + QPy^{q-r+1}dx + Q'Pdx = o$. Or, ſi P eſt une fonction de x, il eſt evident que $Q'P$ le ſera auſſi, & que $S.Q'Pdx$ ſe reduit a une intégrale d'une ſeule variable.

Il ne faut donc plus que rendre complette la différentielle $Py^{q-r}dy + QPy^{q-r+1}dx$; or il faut pour cela que $\frac{d(Py^{q-r})}{dx} = \frac{d(QPy^{q-r+1})}{dy}$, c'eſt a dire, $\frac{y^{q-r}(dP)}{dx} = (q-r+1)y^{q-r}QP$; d'ou l'on tire $\frac{dP}{P} = (q-r+1)Qdx$, & en intégrant $L.P = S.(q-r+1)Qdx = S.(q-r+1)Qdx.L.e$. Donc $P = e^{S.(q-r+1)Qdx}$, & en ſubſtituant cette valeur de P dans l'equation reduite, on aura l'intégrale $\frac{y^{q-r+1}}{q-r+1} \times e^{S.(q-r+1)Qdx} + e^{S.(q-r+1)Qdx}.S.Q'dx = C.$

CCCXLVII.

Nous eclaircirons les methodes precedentes par l'exemple d'une différentielle a trois variables. Soient propofées les equations $dx + a dy + (bx + cy) T dt = o$; $k dx + a' dy + (b'x + c'y) t dT = o$, dans lefquelles x, y, t font trois variables, & T une fonction quelconque de t, les autres quantités etant des conftantes. On multipliera l'une des deux equations, par exemple, la premiere, par un coefficient indeterminé, & conftant g, & l'ayant ajoutée ainfi a la feconde, on multipliera le tout par un facteur P, qu'on fuppofe être une fonction de t; l'equation deviendra $(gP + kP) dx + (gaP + a'P) dy + \{(gbP + b'P) x + (gcP + c'P) y\} T dt = o$. Suppofons maintenant que cette equation foit une différentielle complette, on aura

$$\text{I.} \quad \frac{d(gP + kP)}{dt} = \frac{d[(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y]}{dx}$$

$$\text{II.} \quad \frac{d(gaP + a'P)}{dt} = \frac{d[(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y]}{dy}$$

$$\text{III.} \quad \frac{d(gP + kP)}{dy} = \frac{d(gaP + a'P)}{dx}$$

P etant par la fuppofition une fonction de t, qu'on regarde comme conftante dans la troifieme equation, il

eft

eſt clair que cette equation ſe reduit a $o = o$, puiſque $dP = o$, mais les deux autres donnent $\frac{(g+k)dP}{dt} = (gb+b')P$, & $\frac{(ga+a')dP}{dt} = (gc+c')P$; d'où l'on tire $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+k}dt$, & $\frac{dP}{P} = \frac{gc+c'}{ga+a'}dt$, & en egalant ces deux valeurs de $\frac{dP}{P}$, & diviſant par dt, on aura $\frac{gb+b'}{g+k} = \frac{gc+c'}{ga+a'}$, equation du ſecond degré, qui donnera deux valeurs de g, qu'on pourra par conſequent regarder comme connûe. Or, g etant donnée, on connoîtra P; car l'equation $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+k}$ donne $P = e^{\frac{gb+b'}{g+k}t}$. Donc l'equation différentielle $(gP+kP) \times dx + (gaP+a'P)dy + \{(gbP+b'P)x + (gcP+c'P)y\} Tdt = o$ eſt complette, & ſon intégrale eſt $(gP+kP)x + (gaP+a'P)y = C.$, en ſuppoſant que g deſigne une valeur de g trouvée par l'equation du ſecond degré. On auroit de même l'intégrale pour une ſeconde valeur de g donnée par la même equation.

CCCXLVIII.

REMARQUE. Nous avons deja obſervé dans la remarque qui termine le premier Chapitre Part. I.,

qu'ayant trouvé un facteur M qui rende une différentielle complette, on peut trouver une infinité d'autres facteurs, qui satisferont aux conditions d'intégrabilité. Car, puisque la différentielle $M(Adx+Bdy)$ est intégrable, par supposition, soit z, fonction de x, & de y, egale a l'intégrale de cette différentielle & de plus soit Z une fonction quelconque de z; il est clair que Zdz est intégrable, & par consequent aussi $MZ(Adx+Bdy)=Zdz$ sera intégrable; donc, si l'on trouve un facteur M, qui rende complette la différentielle $Adx+Bdy$, on en pourra trouver une infinité d'autres MZ, prenant pour Z une fonction quelconque de l'intégrale $S.M(Adx+Bdy)$. Il faut observer qu'il est quelque fois très-commode de partager une equation différentielle en plusieurs parties, & d'examiner si on peut les rendre complettes separément par un facteur commun, car alors l'intégrale pourra devenir très-aisée. Soit, par exemple, la différentielle $\alpha y dx+\beta x dy+\gamma x^{\mu-1}y^{\nu}dx+\delta x^{\mu}y^{\nu-1}dy=0$, que nous partageons en deux parties $\alpha y dx+\beta x dy$, & $\gamma x^{\mu-1}y^{\nu}dx+\delta x^{\mu}y^{\nu-1}dy$; nous avons demontré dans la remarque citée, que la premiere partie devenoit complette par le facteur $x^{\alpha n-1}y^{\beta n-1}$, & la seconde partie par le facteur $x^{\gamma m-\mu}y^{\delta n-\nu}$, n & m etant des

quantités indeterminées, on pourra, pour egaler les facteurs, fuppofer $\alpha n - 1 = \gamma m - \mu$, & $\beta n - 1 = \delta m - \nu$, d'où l'on tire $n = \frac{\gamma m - \mu + 1}{\alpha} = \frac{\delta m - \nu + 1}{\beta}$, & par conféquent $m = \frac{\alpha\nu - \beta\mu - \alpha + \beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}$, & $n = \frac{\gamma\nu - \delta\mu - \gamma + \delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}$; fubftituant ces valeurs de m, n, on aura un facteur commun, & la différentielle fera complette, dont l'intégrale $\frac{1}{n} x^{\alpha n} y^{\beta n} + \frac{1}{m} x^{\gamma m} y^{\delta m} = C$. Il feroit inutile d'expliquer icy les différens cas de cette intégrale. Il fuffit d'obferver qu'elle eft algebrique, lorfque m & n font des quantités réelles. Cette methode de feparer les différentielles abrege beaucoup les calculs. Au refte il faut remarquer qu'une différentielle totale multipliée par un facteur devient très-fouvent complette, quoiqu'aucune partie de cette différentielle ne puiffe être complettée feparement.



CHAPITRE II.

De la methode de M. Newton pour intégrer par les ſeries les equations différentielles a pluſieurs variables mêlées x, y, z, &c., lorſque ces equations ne contiennent que les premieres différences dx, dy, dz, &c., ou leurs produits.

CCCXLIX.

LA methode que nous allons expliquer, & qu'on trouve dans le Traité *De la Methode des Fluxions & des ſeries infinies*, ſuppoſe la theorie des ſuites, telle qu'on la trouve dans ce celebre Auteur, & dans tous les bons Ouvrages d'Algebre. Car premierement, ſi l'equation différentielle, qu'on ſe propoſe d'intégrer par cette methode, contient des fractions dont les denominateurs ſoient des quantités variables & complexes, comme $\frac{1}{1+xx}$, $\frac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}$, il faut reduire ces fractions en ſuites infinies de termes ſimples, par la diviſion continuée a l'infini, & ecrire la ſuite $1-x^2+x^4-x^6+x^8$ &c. au lieu de la fraction $\frac{1}{1+xx}$: la

fuite $2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13x^2 + 34x^{\frac{5}{2}} - 73x^3$ &c. au lieu de la fraction $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x}$, & ainsi des autres. De même si l'equation différentielle proposée contient des radicaux de quantités variables & complexes, comme $\sqrt{aa + xx}$, $\sqrt{\frac{1 + ax^2}{1 - bx^2}}$, il faut les reduire par l'extraction des racines continuée, ou par le binome de M. Newton, ou par les autres methodes connûes a des suites infinies de termes simples, & ecrire la serie infinie $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \frac{7x^{10}}{256a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}} +$ &c., ou $x + \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16x^5} - \frac{5a^8}{128x^7} + \frac{7a^{10}}{256x^9} - \frac{21a^{12}}{1024x^{11}} +$ &c. au lieu de $\sqrt{aa + xx}$, & la ferie infinie

$$\begin{array}{llll} 1 + \frac{1}{2}bx^2 & + \frac{3}{8}b^2x^4 & + \frac{5}{16}b^3x^6 & + \&c. \\ + \frac{1}{2}a & + \frac{1}{4}ab & + \frac{3}{16}ab^2 & \\ & - \frac{1}{8}aa & - \frac{1}{16}a^2b & \\ & & + \frac{1}{16}a^3 & \end{array}$$

au lieu de $\sqrt{\frac{1 + ax^2}{1 - bx^2}}$.

Enfin il arrive fouvent dans l'ufage de cette methode, qu'on a befoin de trouver en fuites infinies de termes fimples les racines des equations affectées de toutes fortes de degrés; par exemple la racine y de l'equation affectée du troifieme degré $y^3 + aay + axy - x^3 + 2a^3 = o$, qu'on trouve par les methodes connûes $= a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3} +$ &c. a l'infini; ou la racine y de l'equation affectée du onzieme degré $\frac{63y^{11}}{2816} + \frac{35y^9}{1152} + \frac{5y^7}{112} + \frac{3y^5}{40} + \frac{1}{6}y^3 + y - z = o$, qu'on trouve $= z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$ &c.

Il faut remarquer, qu'on ne donne icy le nom de quantités *composées*, qu'a celles qui le font par rapport aux variables, & qu'on appelle *fimples* toutes les quantités qui ne font compofées, que par rapport aux conftantes, qu'elles renferment, par ce qu'on peut les reduire a des quantités fimples, en les fuppofant egales a quelque conftante. Ainfi les quantités $\frac{ax + bx}{c}$, $\frac{x}{a + b}$, $\frac{bcc}{ax + bx}$, $\frac{b^4}{axx + bxx}$, $\sqrt{ax + bx}$, &c. font regardées comme fimples, par ce qu'on peut les reduire aux

quantités ſimples $\frac{ex}{c}$, $\frac{x}{c}$, $\frac{bcc}{ex}$, $\frac{b^4}{cxx}$, $\sqrt{cx}$, ou $c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; en ſuppoſant $a+b=c$.

CCCL.

Lorſque l'equation différentielle propoſée ne contient que deux variables x, & y avec les premieres différences dx & dy, ou leurs produits quelconques dx^2, dy^2, dx^3, dy^3, $dxdy$, dx^2dy, *&c;* ſi on veut l'intégrer par la methode ſuivante, il faudra la diſpoſer de maniere, qu'on ait d'un côté du ſigne d'egalité la raiſon $\frac{dy}{dx}$, ou $\frac{dx}{dy}$, & de l'autre côté la valeur de cette raiſon exprimée par une ſuite finie, ou infinie de termes ſimples; ce qu'on pourra toujours faire par l'Article precedent, comme nous allons le voir dans les exemples ſuivans.

Soit propoſée l'equation différentielle $ady-xdy-adx+xdx-ydx=0$, on la reduit d'abord a l'equation $\frac{dy}{dx}=1+\frac{y}{a-x}$, ou a l'equation $\frac{dx}{dy}=\frac{a-x}{a-x+y}$. Dans le premier cas le denominateur $a-x$ de la fraction $\frac{y}{a-x}$ etant une quantité variable, & complexe, on reduit cette fraction a la ſerie infinie de termes ſimples

$\frac{y}{a} + \frac{xy}{aa} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$ &c., d'ou l'on tire $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{a}$ $+ \frac{xy}{aa} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4} +$ &c..

Mais, si on examine l'equation différentielle proposée, on trouve par les methodes du Chapitre precedent, que la différentielle $ady - xdy - adx + xdx - ydx$ est complette, & que son intégrale est $\frac{1}{2}xx - ax - yx + ay$. Il seroit donc inutile dans ce cas de chercher l'intégrale par une suite infinie.

Si l'equation proposée est $dy^2 = dxdy + x^2dx^2$; en la divisant par dx^2, on aura d'abord $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + x^2$, ou $z^2 = z + x^2$, en supposant $\frac{dy}{dx} = z$, & en tirant la racine z de cette equation, on trouve $z = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + xx}$. Or $\sqrt{\frac{1}{4} + xx} = \frac{1}{2} + xx - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10}$ &c. Donc en substituant cette suite infinie de termes simples au lieu de $\sqrt{\frac{1}{4} + xx}$, on aura $\frac{dy}{dx} = 1 + xx - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10}$ &c., ou $\frac{dy}{dx} = - xx + x^4 - 2x^6 + 5x^8 - 14x^{10}$ &c., selon qu'on ajoute-

ajoutera $\sqrt{\frac{1}{4}+xx}$ à $\frac{1}{2}$, ou qu'on l'en soustraira. On voit de plus qu'en multipliant par dx l'equation $\frac{dy}{dx}= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+xx}$, on aura $dy = \frac{1}{2}dx \pm dx\sqrt{\frac{1}{4}+xx}$, &, en prenant les intégrales de côté & d'autre, $y = \frac{1}{2}x \pm S.dx\sqrt{\frac{1}{4}+xx}$.

Si l'equation proposée etoit $dy^3 + axdx^2dy + aadx^2dy - x^3dx^3 - 2a^3dx^3 = 0$; en divisant toute l'equation par dx^3, on auroit $\frac{dy^3}{dx^3} + \frac{axdy}{dx} + \frac{aady}{dx} - x^3 - 2a^3 = 0$, ou $z^3 + axz + aaz - x^3 - 2a^3 = 0$; en supposant $\frac{dy}{dx} = z$, & en tirant la racine z de cette equation affectée du troisieme degré, on trouve $z = \frac{dy}{dx} = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ &c., comme nous l'avons deja dit (Art. CCCXLIX.).

CCCLI.

Partout où se trouvera le rapport $\frac{dy}{dx}$, ou $\frac{dx}{dy}$ des premieres différences des deux variables x & y, pour distinguer plus facilement une de ces variables de l'autre, nous

nommerons *Quantités relatives* la variable & sa différentielle qui seront dans le numerateur de la fraction, qui exprime ce rapport, & nous appellerons *Quantités correlatives* l'autre variable & sa différentielle, qui seront dans le denominateur de la même fraction. Ainsi dans le rapport ou dans la fraction $\frac{dy}{dx}$, y & dy sont des quantités relatives, x & dx des quantités correlatives, au contraire dans la fraction $\frac{dx}{dy}$, x & dx sont des quantités relatives, y & dy des correlatives.

CCCLII.

Tous ces preliminaires supposés, on peut reduire les equations différentielles, dont il est icy question, a trois especes, ou a trois classes. La premiere classe comprend les equations différentielles a deux variables x & y, mais qui ne contiennent que l'une de ces deux variables finies x, ou y avec leurs premieres différences dx & dy, elevées a telles puissances, ou produits qu'on voudra. On peut representer toutes les equations de cette classe par cette forme $Adx^m + Bdy^m + Cdx^n dy^{m-n} + Ddx^p dy^{m-p} + \&c. = o$, en supposant que A, B, C, D, &c. sont des fonctions de constantes, & de la seule variable x, ou y qui se trouve dans l'equation, & que les exposans $m, n, p, m-n, m-p$ sont des nombres entiers &

positifs. La seconde classe est pour les equations différentielles, qui contiennent deux variables finies avec leurs premieres différences elevées a telles puissances ou produits qu'on voudra. On peut aussi representer toutes les equations de cette classe par la forme $A dx^m + B dy^m + C dx^n dy^{m-n} + D dx^p dy^{m-p} + \&c. = o$, en supposant que A, B, C, D, &c. sont des fonctions de x, de y, & de constantes, & les exposans des nombres entiers & positifs. La troisieme classe renferme toutes les equations différentielles, qui contiennent plus de deux variables avec leurs premieres différences elevées a des puissances ou produits quelconques.

CCCLIII.

Probleme I. Trouver les intégrales des equations différentielles de la premiere classe.

Solution. Prenez pour quantité correlative celle des deux variables, qui est la seule finie dans l'equation proposée, & disposez cette equation de maniere, que vous ayez d'un côté la raison de la différence de l'autre variable a la différence de celle-cy, & de l'autre côté la valeur de cette raison exprimée par une suite de termes simples (Art. CCCL.). Multipliez cette valeur ou cette suite par la variable correlative; ensuite divisez chaque terme simple de ce produit par l'exposant

de la variable correlative dans ce terme; ce qui refultera de cette operation fera l'intégrale de la variable relative. Ainfi l'equation propofée etant $dy^2 = dxdy + x^2 dx^2$, on prendra pour quantité correlative la variable x, qui eft la feule finie dans cette equation, & on la reduira (Art. CCCL.) a la forme $\frac{dy}{dx} = 1 + xx - x^4 + 2x^6$ *&c.*; on multipliera cette fuite par x, & on aura le produit $x + x^3 - x^5 + 2x^7$ *&c.*; enfuite divifant chaque terme fimple de ce produit par l'expofant de x dans ce terme, on trouve $\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{2x^7}{7}$ *&c.* Cette fuite fera l'intégrale de dy, c'eft a dire, $y = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{2x^7}{7}$ *&c.*

DEMONSTRATION. Puifque $\frac{dy}{dx} = 1 + xx - x^4 + 2x^6$ *&c.*, en multipliant de côté & d'autre par dx, on aura $dy = dx + x^2 dx - x^4 dx + 2x^6 dx$ *&c.*, & en intégrant de côté & d'autre, on aura l'intégrale de dy, ou y egale a l'intégrale de toute la fuite $dx + x^2 dx - x^4 dx + 2x^6 dx$ *&c.* Or on trouve cette intégrale, en intégrant chaque terme en particulier fuivant la regle

generale $S.x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, c'eſt a dire, en multipliant dans chaque terme le coefficient conſtant ou variable de dx par x, & diviſant ce produit par l'expoſant de x dans ce terme. Ainſi on trouve $S.dx$, en multipliant 1 par x, pour avoir le produit x, & en diviſant ce produit par 1 expoſant de x^1; & de même $S.x^2 dx = \frac{x^3}{3}$, en multipliant x^2 par x, & diviſant ce produit par l'expoſant 3 de x dans x^3, & ainſi des autres; d'où l'on voit que dans la ſolution du Probleme on n'a fait que ſuivre les regles generales d'intégration. *C.Q.F.D.*

Nous ajouterons icy quelques autres exemples de cette ſolution.

Si l'equation propoſée eſt $\frac{dy}{dx} = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512aa}$ &c., on trouvera $y = ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048aa}$ &c. de même ſi l'equation etoit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{a}{x^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{3}{2}} = x^{-3} - x^{-2} + ax^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$, on trouvera $y = \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{ax^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + 2ax^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$.

Si on a l'equation $\frac{dx}{dy} = \frac{2bbc}{\sqrt{ay^3}} + \frac{3yy}{a+b} + \sqrt{by+cy} = \frac{2bbc}{\sqrt{a}} y^{-\frac{3}{2}} + \frac{3yy}{a+b} + y^{\frac{1}{2}} \sqrt{b+c}$ on trouvera $x = -\frac{4bbc}{\sqrt{ay}} + \frac{y^3}{a+b} + \frac{2}{3} \sqrt{by^3+cy^3}$; puisque la valeur de $\frac{dx}{dy}$, ou la suite $\frac{2bbc}{\sqrt{a}} y^{-\frac{3}{2}} + \frac{3y^2}{a+b} + y^{\frac{1}{2}} \sqrt{b+c}$ etant multipliée par la correlative y devient $\frac{2bbcy^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}} + \frac{3y^3}{a+b} + y^{\frac{3}{2}} \sqrt{b+c}$, & en divisant chaque terme de cette suite par l'exposant de y dans ce terme, on trouve $x = -\frac{4bbc}{y^{\frac{1}{2}} \sqrt{a}} + \frac{y^3}{a+b} + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{b+c} = -\frac{4bbc}{\sqrt{ay}} + \frac{y^3}{a+b} + \frac{2}{3} \sqrt{by^3+cy^3}$.

De la même façon l'equation $\frac{dy}{dz} = z^{\frac{2}{3}}$ donne $y = \frac{3}{5} z^{\frac{5}{3}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{ab}{cx^{\frac{1}{3}}}$ donne $y = \frac{3abx^{\frac{2}{3}}}{2c}$; mais l'equation $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}$ donne $y = \frac{a}{0}$, car, si on multiplie $\frac{a}{x}$ par x,

le produit ſera a, ou ax^0, & ſi on diviſe par l'expoſant de x dans a, ou dans ax^0, le quotient ſera $\frac{a}{0}$, quantité infinie, qui doit être la valeur de y.

CCCLIV.

Quand on trouvera dans la valeur du rapport $\frac{dy}{dx}$ un terme ſimple, come $\frac{a}{x}$, ou une fraction dont le denominateur eſt la variable correlative d'une ſeule dimenſion, on pourra intégrer ce terme par les logarithmes hyperboliques puiſque $S.\ \frac{adx}{x} = a\,L.\,x$, ou bien ayant ſuppoſé la variable correlative x egale a la ſomme ou a la différence d'une autre variable z, & d'une conſtante c priſe a volonté, on ſubſtituera cette ſomme, ou cette différence au lieu de x, & dz au lieu de dx. Par exemple, ſi l'equation eſt $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}$, on aura $dy = \frac{adx}{x}$, $y = a\,L.\,x$; ou bien, ayant ſuppoſé $x = c + z$, on aura $dx = dz$, $\frac{a}{x} = \frac{a}{c+z} = \frac{a}{c} - \frac{az}{cc} + \frac{azz}{c^3} - \frac{az^3}{c^4}$ &c.; $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = \frac{a}{c} - \frac{az}{cc} + \frac{azz}{c^3} - \frac{az^3}{c^4}$ &c., & par la ſolution du Probleme $y = \frac{az}{c} - \frac{azz}{2cc} + \frac{az^3}{3c^3}$

$-\frac{az^4}{4c^4}$ &c. On pourra ensuite remettre $x-c$ au lieu de z dans cette valeur de y.

Si l'equation proposée etoit $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x}+3-xx$; ou $dy=\frac{2dx}{x}+3dx-xxdx$, en se servant des logarithmes hyperboliques on auroit $y=2L.x+3x-\frac{1}{3}x^3$, ou bien en substituant $1+z$ au lieu de x, on auroit $\frac{dy}{dz}=\frac{2}{1+z}+3-(1+z)^2$, & en reduisant par la division la fraction $\frac{2}{1+z}$ en serie infinie $2-2z+2zz-2z^3+2z^4$ &c., on trouveroit $\frac{dy}{dz}=4-4z+zz-2z^3+2z^4$ &c., & par la solution du probleme $y=4z-2zz+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{2}z^4+\frac{2}{5}z^5$ &c.

Si l'equation etoit $\frac{dy}{dx}=x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}-x^{\frac{1}{2}}$, ou $dy=x^{-\frac{1}{2}}dx+x^{-1}dx-x^{\frac{1}{2}}dx$, en intégrant de côté & d'autre, on auroit $y=2x^{\frac{1}{2}}+L.x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Mais si on vouloit substituer $1-z$ pour x, & $-dz$ pour dx, on auroit $\frac{dy}{-dz}=(1-z)^{-\frac{1}{2}}+(1-z)^{-1}$ —

$-(1-z)^{\frac{1}{2}}$, ou $\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{1-z}} - \frac{1}{1-z} + \sqrt{1-z}$.

Or le terme $\frac{1}{1-z}$ donne par la diviſion la ſerie infinie $1 + z + z^2 + z^3$ &c.; le terme $\sqrt{1-z}$ donne par l'extraction de la racine la ſerie $1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}zz - \frac{1}{16}z^3$ &c., & le terme $\frac{1}{\sqrt{1-z}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}zz - \frac{1}{16}z^3 \&c.}$ donne par la diviſion $1 + \frac{1}{2}z + \frac{3}{8}zz + \frac{5}{16}z^3$ &c., & ſuivant la ſolution du Probleme $y = -z - zz - \frac{1}{2}z^3 - \frac{11}{32}z^4$ &c.

CCCLV.

On peut reſoudre le même Probleme par une autre methode generale aſſez facile, & qui n'eſt qu'un Corollaire de ce que nous venons de dire. Soit propoſé d'intégrer l'equation différentielle a deux variables $A\,dx^m + B\,dy^m + C\,dx^n\,dy^{m-n} + D\,dx^p\,dy^{m-p} +$ &c. $= 0$, dans laquelle A, B, C, D, &c. ſont des fonctions de conſtantes & de la ſeule variable x, & les expoſans m, n, p, $m-n$, &c. des nombres entiers poſitifs. On prend pour cela une troiſieme variable z

qu'on ſuppoſe $=\frac{dy}{dx}$, d'où l'on tire $dy=zdx$; $dy^m=z^m dx^m$; $dy^{m-n}=z^{m-n}dx^{m-n}$; $dy^{m-p}=z^{m-p}\times dx^{m-p}$; &c. On ſubſtitue ces valeurs au lieu de dy^m, dy^{m-n}, dy^{m-p}, &c. dans l'equation propoſée, & on la change en $Adx^m+Bz^m dx^m+Cz^{m-n}dx^m+Dz^{m-p}dx^m+\&c.=o$, qu'on diviſe par le facteur commun dx^m. Le quotient eſt $A+Bz^m+Cz^{m-n}+Dz^{m-p}+\&c.=o$, equation a deux variables x, z; puiſque A, B, C, D, &c. ne contiennent que la variable x avec des conſtantes. On trouvera donc par cette equation la valeur de z en x, & en conſtantes. On ſubſtituera cette valeur au lieu de z dans zdx, qui deviendra par cette ſubſtitution une différentielle d'une ſeule variable x; on l'intégrera donc par les methodes de la premiere partie, & ſon intégrale ſera egale a y, puiſque $zdx=dy$.

Suppoſons qu'on veüille intégrer l'equation $Adx^2+Bdy^2+Cdxdy=o$, on aura dans l'equation generale $D=o$, $m=2$, $n=1$, & en faiſant $z=\frac{dy}{dx}$, on trouvera $A+Bz^2+Cz=o$, ou $z^2+\frac{Cz}{B}=-\frac{A}{B}$,

d'où l'on tire $z = \frac{-C \pm \sqrt{CC - 4AB}}{2B}$; $dy = z\,dx = \frac{-C\,dx \pm dx\sqrt{CC - 4AB}}{2B}$, & $y = -S.\frac{C\,dx}{2B} \pm S.\frac{dx\sqrt{CC - 4AB}}{2B} + Q$ conſtante.

Si on ſuppoſe de plus $A = b$, $C = a$, $B = \frac{1}{2}x$, par conſequent $2B = x$, & $CC - 4AB = aa - 2bx$, on aura $dy = -\frac{a\,dx}{x} \pm \frac{dx}{x}\sqrt{aa - 2bx}$, &, en intégrant de part & d'autre $y = Q$. conſtante $-aL.x \pm S.\frac{dx}{x}\sqrt{aa - 2bx}$. Or $S.\frac{dx}{x}\sqrt{aa - 2bx} = 2\sqrt{aa - 2bx} + aL.\frac{\sqrt{aa - 2bx} - a}{\sqrt{aa - 2bx} + a}$ (Art. LI.). Donc $y = Q \pm 2\sqrt{aa - 2bx} - aL.x \pm aL.\frac{\sqrt{aa - 2bx} - a}{\sqrt{aa - 2bx} + a}$, en prenant les logarithmes hyperboliques.

CCCLVI.

PROBLEME II. Trouver par les ſeries les intégrales des equations différentielles de la ſeconde claſſe, ou de celles qui contiennent les deux variables finies x & y, avec leurs premieres différences dx & dy elevées a quelques puiſſances ou produits que ce ſoit.

SOLUTION. 1.° Il faut reduire l'equation propoſée a la forme preſcritte, en mettant d'un côté du

ſigne d'egalité le rapport $\frac{dy}{dx}$, ou $\frac{dx}{dy}$ des premieres différences, & de l'autre côté la valeur de ce rapport exprimée par une ſuite finie, ou infinie de termes ſimples (Art. CCCL.). Par exemple, ſi l'equation propoſée eſt $dy = dx - 3xdx + ydx + xxdx + xydx$, il faudra la reduire a la forme $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + y + xx + xy$, en diviſant par dx.

2.° L'equation etant ainſi preparée, on diſpoſera ſes termes ſuivant les dimenſions des deux variables x, & y, mettant en premier lieu ceux qui ne ſont point affectés de la variable relative, enſuite ceux où cette variable ſe trouve. Ainſi dans l'exemple propoſé on ecrira $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + xx + y + xy$, mettant en premier lieu les termes $1 + 3x + xx$, dans leſquels la variable relative y ne ſe trouve point, & rangeant ces termes ſuivant les dimenſions de la correlative x dans chaque terme; plaçant enſuite les termes $y + xy$, ou la relative y ſe rencontre, & en commençant par ceux, où les dimenſions ſont les plus petites.

3.° Ayant decrit un rectangle $ABDC$, & l'ayant diviſé, comme on le voit (*Fig.* 1.) par des lignes horiſontales EF, PQ, LM, & par la verticale KH, ecrivez dans le rectangle horiſontal $KBFR$ la ſuite des termes, ou la variable relative ne ſe trouve

point, c'eſt a dire, la ſuite $1 - 3x + xx$, dans nôtre exemple. Ecrivez auſſi du haut en bas dans le rectangle vertical *ERSP* l'autre ſuite de termes, où ſe trouve la variable relative; c'eſt icy la ſuite $+y + xy$.

4.° Prenez le premier, ou le plus bas terme de la ſuite horiſontale, ou la variable relative ne ſe trouve point, & qui eſt placée dans le rectangle *KRFB*; multipliez ce terme par la variable correlative, & diviſez le produit par l'expoſant de la correlative dans ce même produit. Ecrivez enſuite le quotient de cette diviſion dans le rectangle horiſontal le plus bas *NHDM*, pour le premier terme de la ſerie, qui doit exprimer la valeur de la variable relative. Dans nôtre exemple il faut multiplier le premier, ou le plus bas terme 1 de la ſuite $1 - 3x + xx$ par la variable correlative x, diviſer le produit x par l'expoſant 1 de x dans ce même produit x^1, & ecrire le quotient x, qui vient de cette diviſion dans le rectangle *NHDM* a côté de la relative y; x ſera le premier terme de la ſerie qu'on cherche, & qui doit exprimer la valeur de y en x.

5.° Pour trouver le ſecond terme de cette ſerie, ſubſtituez dans tous les termes de la ſuite verticale placée dans le rectangle *ERSP* le premier terme que vous venez de trouver, au lieu de la variable relative, & ecrivez la valeur de chaque terme dans le rectangle

RSQF a côté de ce même terme, & dans le rang; qui convient a la dimenſion de la variable correlative dans cette valeur. Ainſi dans nôtre exemple il faut ſubſtituer x au lieu de y dans les termes $+y, +xy$, ce qui donnera les valeurs $+x, +xx$. On ecrira donc la valeur $+x$, a côté de y au ſecond rang, ſous le terme de même dimenſion $-3x$, & la valeur $+xx$ a côté de xy au troiſieme rang ſous le terme de même dimenſion $+xx$ de la ſuite horiſontale $1-3x+xx$. Après ces operations prenez dans le rectangle *KSQB* la ſomme des termes dans leſquels la variable correlative a la plus petite dimenſion après le plus bas terme de la ſuite horiſontale, qui eſt icy 1: Cette ſomme ſera dans nôtre exemple $-3x+x=-2x$, comme on la voit au ſecond rang dans le rectangle des ſommes *SNMQ*. Multipliez cette ſomme par la variable correlative, & ayant diviſé le produit par l'expoſant de la correlative dans ce même produit, ecrivez le quotient de cette diviſion dans le rectangle *NHDM* pour le ſecond terme de la ſerie, qui doit exprimer la valeur de la variable relative. Ainſi dans nôtre exemple, on multiplie la ſomme $-2x$ par la correlative x, & ayant diviſé le produit $-2x^2$ par l'expoſant 2 de x dans ce produit, on ecrit le quotient $-xx$ pour le ſecond terme de la ſerie, qui doit exprimer la valeur de y en x.

6.° De même pour trouver le troisieme terme de cette serie, on substituera dans tous les termes de la suite verticale placée dans le rectangle *ERSP* le second terme de la serie, ou le quotient qu'on vient de trouver, au lieu de la variable relative, & on ecrira la valeur de chaque terme a côté de ce même terme dans le rectangle *RSQF*, & au rang qui convient a la dimension de la variable correlative dans cette valeur. Dans nôtre exemple on substituera $-xx$ au lieu de y dans les deux termes $+y$ & $+xy$; ce qui donnera les valeurs $-xx$, & $-x^3$. On ecrira donc $-xx$ a côté de $+y$ au troisieme rang sous le terme de même dimension $+xx$ de la suite horisontale $1-3x+xx$, & la valeur $-x^3$ a côté de $+xy$ au quatrieme rang. Ensuite on prendra dans le rectangle la somme des termes, dans lesquels la variable correlative a la plus petite dimension, après ceux dont on a pris la somme dans le nombre precedent. Cette somme est icy $xx-xx+xx=xx$. On la multipliera par la variable correlative, & ayant divisé le produit par l'exposant de la correlative dans ce même produit, on ecrira le quotient de cette division dans le rectangle *NHDM*, pour le troisieme terme de la serie, qui doit être la valeur de la variable relative. Dans nôtre exemple on multipliera la somme $+xx$ par x, & ayant divisé le pro-

duit x^3 par l'expoſant 3, on ecrira $+\frac{x^3}{3}$, ou $\frac{1}{3}x^3$ pour le troiſieme terme cherché.

7.° En continuant d'operer de la même maniere, on trouvera le quatrieme terme, qui eſt icy $-\frac{1}{6}x^4$. Car la ſomme $+\frac{1}{3}x^3 - x^3 = -\frac{2}{3}x^3$ etant multipliée par x donne le produit $-\frac{2}{3}x^4$ qu'on doit diviſer par l'expoſant 4, pour avoir le quotient, ou le quatrieme terme $-\frac{2}{12}x^4 = -\frac{1}{6}x^4$. Enfin on trouvera, en continuant les mêmes operations, le cinquieme terme, & tous les autres ſuivants, de ſorte qu'on aura $y = x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$ &c.

Ce Probleme eſt celui dont M. Newton parle en ces termes dans la methode des fluxions: *Sic demum ad finem perduxi hoc valde intricatum & omnium aliorum difficillimum Problema, quando duæ ſolum ſunt fluentes quantitates, una cum fluxionibus ſuis in propoſita æquatione*. Enſuite, parlant de la demonſtration du même Probleme, il ajoute: *Hoc pacto ſolutum eſt Problema, ſed latet demonſtratio. Cum autem tot & tam varia contineat hoc Problema, ut demonſtratio ſynthetice ſine maximis ambagibus deduci nequeat ex genuinis ejus fundamentis,*

ſufficiet

ſufficiet eam breviter indicare analytice. Propoſita igitur æquatione, & opere peracto, tenta num ex æquatione reperta regredi liceat ad propoſitam: la demonſtration de Newton ne conſiſte qu'a verifier l'operation, lorſqu'elle eſt faite, & a examiner ſi elle rend la différentielle propoſée. Mais nous donnerons icy une demonſtration generale de ce beau Probleme, tirée des principes du calcul différentiel.

DEMONSTRATION. Puiſque $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + xx + y + xy$, en multipliant de côté, & d'autre par dx, on aura $dy = dx - 3xdx + xxdx + ydx + xydx$; &, en intégrant, on aura $y = x - xx + \frac{1}{3}x^3 + S.ydx + S.xydx$, d'où l'on voit que x eſt le premier terme de la ſerie, qui doit exprimer la valeur de la variable relative y en x, & qu'on trouve ce terme en intégrant dx, c'eſt a dire, en multipliant 1 par la correlative x, & en diviſant le produit x par l'expoſant 1 de x dans le même produit, ce qui eſt l'operation preſcritte N.° 4.

Si on ſuppoſe preſentement, comme on a coutume de faire dans l'analyſe, que la ſerie qu'on cherche, & qui doit exprimer la valeur de y en x, ſoit trouvée, & qu'elle ſoit repreſentée par $x + X$, x etant ſon premier terme, & X la ſuite de tous ſes autres termes après le premier, en ſubſtituant $x + X$ au lieu de y dans les deux termes $+y$, $+xy$, on aura $y + xy =$

$x + xx + X + xX$, & l'equation $dy = dx - 3xdx + xxdx + (y + xy)dx$ deviendra $dy = dx - 3xdx + xxdx$
$+ xdx + xxdx$
$+ (X + xX)dx$; & en intégrant de côté & d'autre, on aura $y = x - xx + \frac{2}{3}x^3 + S.(X + xX)dx$; par où l'on voit que le second terme de la ferie, qui doit exprimer la valeur de y en x, eft $-xx$, & qu'on trouve ce fecond terme en fubftituant le premier terme x pour y dans $+y + xy$, & en intégrant la différentielle $dx(-3x + x)$, ou $-2xdx$, c'eft a dire, en multipliant la fomme $-2x$ par la correlative x, & en divifant le produit $-2xx$ par l'expofant 2 de x dans ce même produit, pour avoir le quotient $-xx$. C'eft l'operation prefcritte N.° 5.

Suppofant de la même maniere que la ferie qu'on cherche foit $x - xx + X'$, X' reprefentant la fuite des termes de cette ferie après les deux premiers $x - xx$, on aura $y = x + X = x - xx + X'$; par confequent $X = -xx + X'$, & en fubftituant $-xx + X'$ au lieu de X dans les deux termes $+X + xX$, on aura $+X + xX = -xx - x^3 + X' + xX'$, & l'equation $dy = dx - 2xdx + 2x^2dx + (X + xX)dx$ deviendra $dy = dx - 2xdx + 2x^2dx - x^3dx + (X' + xX')dx$, & en
$-x^2dx$

intégrant de part, & d'autre on aura $y = x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + S.(X' + xX')dx$; d'où l'on conclût que $\frac{1}{3}x^3$ eſt le troiſieme terme de la ſerie, qui doit exprimer la valeur de y en x, & qu'on trouvera ce troiſieme terme, en ſubſtituant le ſecond terme $-xx$ pour X dans $X + xX$, ce qui donne $-xx - x^3$, qu'on trouve auſſi en ſubſtituant $-xx$ pour y dans $y + xy$, & en intégrant la différentielle $(x^2 + x^2 - x^2)dx$, ou $+x^2dx$; c'eſt a dire, en multipliant la ſomme x^2 de $+x^2 + x^2 - x^2$ par la correlative x, pour avoir le produit x^3, & en diviſant ce produit par l'expoſant 3 de x dans le même produit, pour avoir le quotient $+\frac{1}{3}x^3$. C'eſt l'operation preſcritte N.° 6.

De même ſi on ſuppoſe que la ſerie qu'on cherche ſoit $x - xx + \frac{1}{3}x^3 + X''$, X'' repreſentant la ſuite des termes de cette ſerie après les trois premiers $x - xx + \frac{1}{3}x^3$, on aura $y = x - xx + X' = x - xx + \frac{1}{3}x^3 + X''$; par conſequent $X' = \frac{1}{3}x^3 + X''$; & en ſubſti-

tuant $\frac{1}{3}x^3 + X''$ au lieu de X' dans les deux termes $X' + xX'$, on aura $X' + xX' = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + X'' + xX''$, & l'equation $dy = dx - 2xdx + x^2dx - x^3dx + (X' + xX')dx$ deviendra $dy = dx - 2xdx + x^2dx - x^3dx + \frac{1}{3}x^4dx + (X'' + xX'')dx$, &, en intégrant,
$+ \frac{1}{3}x^3dx$
on aura $y = x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{15}x^5 + S.(X'' + xX'')dx$; d'où l'on conclût que $-\frac{1}{6}x^4$ eſt la quatrieme terme de la ſerie, qui doit exprimer la valeur de y en x, & qu'on trouve ce quatrieme terme en ſubſtituant le troiſieme $+\frac{1}{3}x^3$ pour X' dans $X' + xX'$; ce qui donne $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4$, qu'on trouve auſſi en ſubſtituant $+\frac{1}{3}x^3$ pour y dans $y + xy$, & en intégrant la différentielle $(-x^3 + \frac{1}{3}x^3dx)$, ou $-\frac{2}{3}x^3dx$, c'eſt a dire, en multipliant la ſomme $-\frac{2}{3}x^3$ de $-x^3 + \frac{1}{3}x^3$ par la correlative x, pour avoir le produit $-\frac{2}{3}x^4$, & en diviſant ce produit par

l'expoſant 4 de x dans le même produit, pour avoir $-\frac{2}{12}x^4 = -\frac{1}{6}x^4$. C'eſt l'operation préſcritte N.° 7.

On voit clairement qu'on peut demontrer toutes les autres operations préſcrittes dans la ſolution, & que cette demonſtration peut s'appliquer a tous les cas: donc &c. *C. Q. F. D.*

Nous allons eclaircir par des Exemples les difficultés qui peuvent ſe rencontrer dans la pratique de cette methode.

CCCLVII.

EXEMPLE I. L'equation propoſée etant $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{aa} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$ *&c.* a l'infini, on ecrit le terme 1 dans le rectangle horiſontal *KRFB* (*Fig.* 2.), & toute la ſuite des autres termes dans le rectangle vertical *ERSP*. On multiplie le terme 1 par x, & ayant diviſé le produit x par l'expoſant 1 de x, on ecrit le quotient x dans le rectangle *NHDM*, pour le premier terme de la ſuite qui doit exprimer la valeur de y en x.

On ſubſtitue dans tous les termes du rectangle vertical *ERSP* le quotient ou le premier terme x au lieu de y, & on ecrit la valeur de chaque terme a côté de ce même terme dans le rectangle *RSQF* au

rang qui convient a la dimenſion de la correlative dans la valeur de ce terme. Ainſi on ecrit $\frac{x}{a}$ valeur du terme $\frac{y}{a}$ a côté de ce terme au ſecond rang; $\frac{xx}{aa}$ valeur du terme $\frac{xy}{aa}$ a côté du même terme au troiſieme rang; $\frac{x^3}{a^3}$ valeur de $\frac{x^2 y}{a^3}$ a côté de ce terme au quatrieme rang, &c. Enſuite, pour trouver le ſecond terme de la ſerie qu'on cherche, on multiplie $\frac{x}{a}$ par x, pour avoir le produit $\frac{xx}{a}$, qu'on diviſera par l'expoſant 2; & on ecrira le quotient $\frac{xx}{2a}$ dans le rectangle *NHDM* pour le ſecond terme de la ſerie. Pour trouver le troiſieme terme de cette ſerie, on ſubſtitue le ſecond terme $\frac{x^2}{2a}$ au lieu de y dans tous les termes du rectangle vertical *ERSP*; on ecrit la valeur de chaque terme a ſon rang dans le rectangle *RFQS*, marquant $\frac{xx}{2aa}$ a côté du terme $\frac{y}{a}$ au troiſieme rang; $\frac{x^3}{2a^3}$ a côté du terme $\frac{xy}{aa}$ au quatrieme rang, &c. On prend enſuite la ſomme des termes du troiſieme rang, qui eſt +

$\frac{xx}{2aa} + \frac{xx}{aa} = \frac{3xx}{2aa}$, & on la multiplie par x, pour avoir le produit $\frac{3x^3}{2aa}$, qu'on divise par l'exposant 3, & on ecrit le quotient $\frac{x^3}{2aa}$ pour le troisieme terme de la serie dans le rectangle *NHDM*. En continuant de même les operations prescrittes dans la solution du probleme, on trouve $y = x + \frac{xx}{2a} + \frac{x^3}{2aa} + \frac{x^4}{2a^3} + \frac{x^5}{2a^4} + \frac{x^6}{2a^5}$ *&c.* a l'infini.

Il faut remarquer que dans cet Exemple on ne s'est proposé de pousser la serie qui exprime la valeur de y en x, que jusqu'a la sixieme dimension de x, & que c'est pour cette raison, qu'on a ômis dans l'operation tous les termes, qu'on prévoyoit devoir être inutiles pour cette fin, comme on l'a indiqué par le signe &c., qu'on a ajouté a toutes les suites interrompües.

CCCLVIII.

EXEMPLE II. Si on proposoit l'equation $\frac{dy}{dx} = -$
$3x + 3xy + yy - xyy + y^3 - xy^3 + y^4 - xy^4$ *&c.*
$+ 6xxy - 6xx + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4$*&c.*,
& qu'on ne voulût pousser la serie qui doit exprimer la va-

leur de y en x, que jufqu'a la feptieme dimenfion de x, on difpoferoit les termes de l'equation felon l'ordre préfcrit, en plaçant les termes, ou la relative y ne fe trouve point, dans le rectangle horifontal $KRFB$ (*Fig.* 3.) fans paffer au de la du terme $-14x^6$, puifqu'on veut rejetter de la ferie qui doit exprimer la valeur de y en x tous les termes dans lefquels la dimenfion de x furpaffe 7, & puifqu'il faut, fuivant la regle, multiplier par la correlative x tous les termes qui font dans le rectangle $KBQS$, ou toutes les fommes du rectangle $SNMQ$, pour trouver les termes de la ferie qu'on cherche. On mettroit enfuite dans le rectangle vertical $ERSP$ les autres termes de l'equation, dans lefquels la relative y fe trouve, fans aller au delà des termes, qui donnent jufqu'a la fixieme dimenfion de x, lorfqu'on fubftitue les valeurs de y en x dans ces mêmes termes. Ainfi puifqu'on trouve, fuivant la regle, que le premier terme de la ferie qu'on cherche, eft $-\frac{3}{2}xx$, & qu'il faut fubftituer $-\frac{3}{2}xx$ pour y, dans les termes du rectangle vertical $ERSP$, ce qui donnera $+10x^4y=-15x^6$; $-xyy=-\frac{9}{4}x^5$, & $y^3=-\frac{27}{8}x^6$; on voit bien qu'il feroit inutile, lorfqu'on ne veut pouffer la ferie que jufqu'a la feptieme dimenfion de x, de

de marquer dans le rectangle vertical *ERSP* les termes $+ 12 x^5 y$ &c., $- xy^3$ &c., $+ y^4$ &c.

Après avoir ainsi disposé les termes de l'equation dans le rectangle *AXTB*, on trouvera sans difficulté les quatre premiers termes $- \frac{3}{2} xx - 2x^3 - \frac{25}{8} x^4 - \frac{91}{20} x^5$ de la valeur de y; mais comme les puissances y^2, y^3 &c. se trouvent dans les termes du rectangle vertical *ERSP*, & puisque, pour trouver les autres termes de la serie, qui doit exprimer la valeur de y, il faut substituer dans ce rectangle les valeurs de ces puissances en x, on aura besoin des premiers termes du quarré, du cube, &c. de la serie $- \frac{3}{2} x^2 - 2x^3 - \frac{25}{8} x^4$ &c.; qu'on trouvera en multipliant cette serie par elle même autant de fois, qu'il sera necessaire; ce qui donnera $yy = + \frac{9}{4} x^4 + 6x^5 + \frac{107}{8} x^6$ &c., $y^3 = - \frac{27}{8} x^6$ &c., en negligeant les autres termes, ou la dimension de x surpasse 6; par ce qu'on ne veut point icy pousser la serie qu'on cherche au delà de la septieme dimension de x. Nous avons marqué les premiers termes de ces puissances dans le rectangle *CXTD*, & il faudroit en augmenter le nombre successivement,

a mesure qu'on voudroit pousser plus loin la serie qui exprime la valeur de y. On trouve de cette maniere $y = -\frac{3}{2}xx - 2x^3 - \frac{25}{8}x^4 - \frac{91}{20}x^5 - \frac{111}{16}x^6 - \frac{567}{35}x^7$ &c. quantité negative; d'où l'on conclût que l'une des deux variables x & y, augmente, tandis que l'autre diminue. Au reste on voit par cet Exemple comment il faut proceder dans tous les autres cas, qui renferment les puissances quelconques de la quantité relative.

CCCLIX.

EXEMPLE III. On resoud de la même maniere les equations dans lesquelles la quantité relative est elevée a des puissances fractionaires; par exemple, si on propose l'equation $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y - 4yy + 2yx^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}xx + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^3$, dans laquelle la quantité relative x est elevée a la puissance fractionaire $\frac{1}{2}$; on en disposera les termes, suivant l'ordre préscrit, dans le rectangle *ACDB* (*Fig.* 4.). Ensuite on multipliera le premier terme $+\frac{1}{2}y$ par la quantité correlative y, & ayant divisé le produit $\frac{1}{2}y^2$ par l'exposant 2, on ecrira le quotient $\frac{1}{4}yy$ dans le rectangle *NHDM* pour le pre-

mier terme de la ſerie, qui doit exprimer la valeur de x en y. Pour trouver le ſecond terme de cette ſerie, on ſubſtituera $\frac{1}{2}y$ pour $x^{\frac{1}{2}}$, & $\frac{1}{16}y^4$ pour xx dans les termes du rectangle vertical $ERSP$, & on ecrira dans le rectangle $RSQF$ y^2 pour $2yx^{\frac{1}{2}}$ a côté de ce terme au ſecond rang, & $-\frac{1}{20}y^4$ pour $-\frac{4}{5}xx$ a côté de ce terme a ſon rang. On prendra la ſomme des termes $-4yy+yy=-3yy$, qu'on multipliera par y pour avoir le produit $-3y^3$; on diviſera ce produit par l'expoſant 3; le quotient ſera $-y^3$, qu'on ecrira pour le ſecond terme de la ſerie dans le rectangle $NHDM$. Après cette operation on commençera a chercher les premiers termes de la racine quarrée de x, c'eſt a dire, de la ſerie $\frac{1}{4}yy-y^3$ &c. On trouve que les deux premiers termes de cette racine ſont $\frac{1}{2}y-yy$, & que les deux premiers termes de xx, ou du quarré de la ſerie $\frac{1}{4}yy-y^3$ &c. ſont $\frac{1}{16}y^4-\frac{1}{2}y^5$.

Mais, par ce qu'on ne veut pouſſer icy cette ſerie, que juſqu'au terme où la dimenſion de y ne paſſe pas 5, on ômettra tous les termes dans leſquels cet-

te dimenſion de y ſurpaſſe 4. On ſubſtituera donc d'abord dans les termes du rectangle vertical $ERSP$, $+\frac{1}{2}y-yy$ pour $x^{\frac{1}{2}}$, & on aura $2yx^{\frac{1}{2}}=+yy-2y^3$, qu'on ecrira dans le rectangle $RSQF$ a ſon rang. On ecrira de même $-\frac{1}{20}y^4$ pour $-\frac{4}{5}xx$ dans le même rectangle a côté de $-\frac{4}{5}xx$, & a ſon rang. Enſuite on multipliera le terme $+7y^{\frac{5}{2}}$, qui ſe trouve ſeul de ſa dimenſion, par la correlative y, pour avoir le produit $+7y^{\frac{7}{2}}$, qu'on diviſera par l'expoſant $\frac{7}{2}$, ce qui donnera le quotient $2y^{\frac{7}{2}}$, qu'on ecrira dans le rectangle $NHDM$ pour le troiſieme terme de la ſerie ou de la valeur de x en y. On aura donc $x=\frac{1}{4}yy-y^3+2y^{\frac{7}{2}}$ &c., & $x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}y-yy+2y^{\frac{5}{2}}$ &c. en ſubſtituant dans le rectangle $ERSP$ $\frac{1}{2}y-yy+2y^{\frac{5}{2}}$ au lieu de $x^{\frac{1}{2}}$, on aura $+2yx^{\frac{1}{2}}=+yy-2y^3+4y^{\frac{7}{2}}$, qu'on devroit ecrire dans le rectangle

RSQF a côté du terme $+2yx^{\frac{1}{2}}$. Mais, comme on a deja ecrit les deux termes $+yy-2y^3$, on n'a plus qu'a ajouter le troisieme terme $+4y^{\frac{7}{2}}$. De même en substituant dans le rectangle *ERSP* $\frac{1}{16}y^4$ pour xx, on aura $-\frac{4}{5}xx = -\frac{1}{20}y^4$, qu'on a deja marqué dans le rectangle *RSQF*. On prendra la somme des termes correspondans $+2y^3-2y^3$, qui, etant zero, ne donne rien. Ensuite on prendra le terme $4y^{\frac{7}{2}}$, qui est seul de sa dimension, on le multipliera par y, pour avoir le produit $4y^{\frac{9}{2}}$, qu'on divisera par l'exposant $\frac{9}{2}$, & on ecrira le quotient $+\frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}}$ dans le rectangle *NHDM* pour le quatrieme terme de la suite. On aura donc $x = \frac{1}{4}yy - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}}$ &c., dont la racine quarrée, où $x^{\frac{1}{2}}$ est $\frac{1}{2}y - yy + 2y^{\frac{5}{2}} - y^3$ &c. Enfin, en substituant dans le rectangle *ERSP* $\frac{1}{2}y - yy + 2y^{\frac{5}{2}} - y^3$ au lieu de $x^{\frac{1}{2}}$, on aura $+2yx^{\frac{1}{2}} =$

$+yy-2y^3+4y^{\frac{7}{2}}-2y^4$, qu'on devroit ecrire dans le rectangle *RSQF* a côté du terme $+2yx^{\frac{1}{2}}$; mais, comme on a deja marqué les trois premiers termes $+yy-2y^3+4y^{\frac{7}{2}}$, on se contentera d'ajouter le quatrieme terme $-2y^4$. Pour la valeur du terme $-\frac{4}{5}xx=-\frac{1}{20}y^4$, on voit qu'on l'a deja ecrite. Ainsi, pour trouver le cinquieme terme de la serie, ou de la valeur de x en y, on prendra la somme des termes correspondans $-2y^4-\frac{1}{20}y^4=-\frac{41}{20}y^4$; on multipliera cette somme par y, pour avoir $-\frac{41}{20}y^5$, & après avoir divisé ce produit par l'exposant 5, on ecrira le quotient $-\frac{41}{100}x^5$ pour le cinquieme terme de la serie dans le rectangle *NHDM*, & on aura $x=\frac{1}{4}yy$ $-y^3+2y^{\frac{7}{2}}+\frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}}-\frac{41}{100}y^5$ &c. On voit bien qu'on peut prolonger cette serie autant qu'on voudra par les mêmes operations continuées.

CCCLX.

EXEMPLE IV. Lorſque la quantité relative a des expoſans fractionaires; on peut encore la reduire en nombres entiers par la methode ordinaire, c'eſt a dire, en egalant cette quantité relative avec ſon expoſant fractionaire a une autre variable dont l'expoſant ſoit un nombre entier, & en ſubſtituant celle-cy au lieu de la premiere dans toute l'equation. Par exemple, ſi l'equation propoſée eſt $\frac{dy}{dx} = 3xy^{\frac{2}{3}} + y$ dans laquelle la quantité relative y a pour expoſant la fraction $\frac{2}{3}$, on ſuppoſera $y^{\frac{1}{3}} = z$, ou $y = z^3$, ce qui donnera en différentiant $dy = 3z^2 dz$; en ſubſtituant $3zzdz$ au lieu de dy, zz au lieu de $y^{\frac{2}{3}}$, & z^3 au lieu de y, l'equation deviendra $\frac{3zzdz}{dx} = 3xzz + z^3$, ou en diviſant par $3zz$; $\frac{dz}{dx} = x + \frac{1}{3}z$, &, en cherchant la valeur de z en x par la methode de Newton, on trouvera la ſerie $z = \frac{1}{2}xx + \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{216} + \frac{x^5}{3240}$ &c. Remettez $y^{\frac{1}{3}}$ au lieu de z dans cette equation, vous aurez $y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}xx + \frac{x^3}{18}$

$+\frac{x^4}{216}$ &c., &, en faisant le cube de côté & d'autre, $y=\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{24}x^7+\frac{7}{864}x^8$ &c. De même si l'equation proposée etoit $\frac{dy}{dx}=\sqrt{4y}+\sqrt{xy}$, ou $\frac{dy}{dx}=2y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, en supposant $zz=y$, on auroit $2zdz=dy$, $z=y^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}z$, & l'equation deviendroit $\frac{2zdz}{dx}=2z+x^{\frac{1}{2}}z$, &, en divisant par $2z$, $\frac{dz}{dx}=1+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$, d'où l'on tire $dz=dx+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}dx$, &, en intégrant de côté & d'autre, $z=x+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$; par consequent $y^{\frac{1}{2}}=x+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, &, en quarrant de part & d'autre, $y=xx+\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{9}x^{3}$.

M. Newton fait a propos de cet Exemple une remarque importante, que nous ne devons pas ômettre; c'est qu'on peut trouver une infinité de series différentes pour exprimer la valeur de la quantité relative par la quantité correlative, & par des constantes.

Par

Par exemple, dans l'equation $\frac{dy}{dx} = 2y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$, qu'on vient de resoudre, & qui a donné $y = xx + \frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9} x^3$. Si, après avoir supposé $z = y^{\frac{1}{2}}$, & changé l'equation en $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$, ou $dz = dx + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} dx$, on ajoute une constante quelconque C après l'intégration, on aura $z = C + x + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}}$, intégrale qui rendra en différentiant la même equation $dz = dx + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} dx$, ou $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{2} \times x^{\frac{1}{2}} dx$, & on aura zz, ou $y = CC + 2Cx + \frac{2}{3} Cx^{\frac{3}{2}} + xx + \frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9} x^3$, serie différente de la premiere $xx + \frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9} x^3$, & qu'on peut varier a l'infini, en donnant a la constante C telle valeur qu'on voudra.

Cette remarque est generale, & peut s'appliquer a toutes les equations dont il s'agit dans le Probleme II. Car toutes ces equations peuvent être representées par $\frac{dy}{dx} = z$, z etant une suite quelconque de termes sim-

ples, composés des deux variables y & x, & de conſtantes. Or, ſi $\frac{dy}{dx} = z$, on aura $dy = z dx$, &, en intégrant de part & d'autre, $y = S. z dx$, mais on peut ajouter une conſtante quelconque C, & ecrire $y = C + S. z dx$, quelque ſoit la ſerie qui exprime l'intégrale $S. z dx$, ou la premier valeur de y. De plus on peut prendre pour le premier terme de la ſerie, qui doit exprimer la valeur de y, tel nombre, ou telle quantité conſtante qu'on voudra, ſubſtituer enſuite cette quantité, ou ce premier terme pour y dans tous les termes du rectangle vertical $ERSP$ (*Fig.* 5.), & continuer l'operation a l'ordinaire, pour trouver les autres termes de la ſerie, ou de la valeur de y. Ainſi dans l'exemple, dont nous ſommes ſervis pour la demonſtration du Probleme II., ſi on prend 1 pour le premier terme de la valeur de y, & qu'on ſubſtitue 1 pour y dans les termes $+y$, & $+xy$ du rectangle vertical $ERSP$, on aura $+y = 1$, qu'on ecrira a côté du terme $+y$ dans le rectangle $RSQF$ ſous le terme $+1$ du rectangle $KRFB$, & on marquera de même $+x$ pour $+xy$ a côté de ce terme dans le rectangle $RSQF$ ſous $-3x$. Enſuite on fera la ſomme des plus bas termes $+1+1=2$, on multipliera cette ſomme par la correlative x pour avoir le produit $2x$, qu'on diviſera par l'expoſant 1, & on

ecrira le quotient $+2x$ dans le rectangle *NHDM*, pour le second terme de la serie qui doit exprimer la valeur de y. On continuera les operations a l'ordinaire, & on trouvera $y = 1 + 2x + x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5$ &c., & de cette façon on peut trouver tant d'autres valeurs de y qu'on voudra, en prenant 2, ou 3, ou un autre nombre quelconque, pour le premier terme; ou bien en representant ce premier terme par une constante arbitraire a (*Fig. 6.*), qu'on pourra ensuite determiner, comme on jugera a propos.

Il faut observer dans le cas, où la quantité qu'on veut extraire, est affectée d'une dimension fractionaire, comme dans l'Exemples IV., qu'on fera bien de prendre l'unité, ou quelqu'autre nombre commode pour le premier terme de la serie; & même cela devient necessaire, quand, pour avoir la valeur de cette dimension fractionaire, l'on ne pourroit tirer autrement la racine, a cause du signe negatif; comme aussi, lorsqu'il n'y a aucun terme, qu'on puisse mettre dans le rectangle horisontal *KRFB*, d'où l'on tire le premier terme de la serie, ou de la valeur de y.

CCCLXI.

Si dans l'equation proposée $\frac{dy}{dx} = z$, la suite z contient quelque terme, qui ait l'une ou l'autre varia-

ble, ou ſa puiſſance au denominateur, il faut ſuivant la regle generale (Art. CCCXLIX.) reduire ce terme a une ſerie infinie, en changeant cette variable en une autre jointe a une conſtante arbitraire avec le ſigne + ou —. Par exemple, ſi l'equation eſt $\frac{dy}{dx} = 3y - 2x + \frac{x}{y} - \frac{2y}{xx}$, il faudra reduire les termes $\frac{x}{y}$ & $\frac{2y}{xx}$ en ſeries infinies par la diviſion, en changeant la variable y en $u \pm b$, ou en $b - u$, & x en $z \pm c$, ou en $c - z$, b & c etant des conſtantes arbitraires, & en diviſant enſuite les numerateurs par leurs denominateurs, pour avoir des ſeries infinies de termes ſimples, dans leſquels les expoſans des variables ſoient poſitifs. Mais comme la raiſon $\frac{dy}{dx}$ demeure la même, ſoit qu'on ecrive $y + b$, ou $y - b$ au lieu de y, & $x + c$, ou $x - c$ au lieu de x, puiſque la différentielle de $y + b$, & celle de $y - b$ eſt toujours dy, & la différentielle de $x + c$, & de $x - c$ eſt toujours dx, de même que la différentielle de $b - y$ eſt $- dy$, & celle de $c - x$ eſt $- dx$; ce qui donnera $\frac{-dy}{-dx} = \frac{dy}{dx}$; on rendra le calcul plus ſimple en ce cas, en ſe contentant de ſubſtituer $y \pm b$, ou $b - y$ au lieu de y, & $x \pm c$, ou $c - x$ au lieu de x dans l'equation, ſans employer de

nouvelles variables, & en operant ensuite suivant les regles préscrittes. Ainsi dans l'equation proposée, si on ecrit $1-y$ pour y, & $1-x$ pour x, on aura $\frac{dy}{dx}=$ $1-3y+2x+\frac{1-x}{1-y}+\frac{2y-2}{1-2x+xx}$, & par la division a l'infini $\frac{1-x}{1-y}=1-x+y-xy+yy-xy^2+y^3-xy^3$ &c., & $\frac{2y-2}{1-2x+xx}=2y-2+4xy-4x+6x^2y-6x^2+8x^3y-8x^3+10x^4y-10x^4$ &c.; d'où l'on tirera $\frac{dy}{dx}=-3x+3xy+y^2-xy^2+y^3-xy^3$ &c. $+6x^2y-6x^2+8x^3y-8x^3+10x^4y-10x^4$ &c. Equation deja resolue (Art. CCCLVIII.).

CCCLXII.

Neantmoins il n'est pas toujours necessaire dans ce cas de reduire l'equation a une autre forme. Par exemple, si l'equation proposée etoit $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}-xx$, on pourroit bien la reduire a une autre forme en substituant $1+y$ au lieu de y; mais il sera plus court d'opérer sans cette reduction, comme on va le voir. Après avoir disposé les termes de l'equation a l'ordinaire, en plaçant $-xx$ dans le rectangle horisontal

KRFB, & $\frac{1}{y}$ dans le rectangle vertical *ERSP*, on prend 1 pour le premier terme de la valeur de y; on substitue cette valeur 1 pour y dans le terme $\frac{1}{y}$. Ensuite on prend la somme des termes les plus bas du rectangle *KSQB*, & trouvant qu'il n'y a que le terme 1, on le multiplie par la correlative x, & divisant le produit x par l'exposant 1, on ecrit le quotient x pour le second terme de la valeur de y dans le rectangle *NHDM*. Pour trouver le troisieme terme, on substitue $1 + x$ pour y dans le terme $\frac{1}{y}$, c'est a dire, qu'on divise 1 par $1 + x$; le quotient est $1 - x$ &c. On ecrit donc ce quotient, ou plutôt a cause qu'on a deja marqué le premier terme 1, on ecrit $- x$ a côté du terme $\frac{1}{y}$ dans le rectangle *RSQF*. On prend ensuite dans le rectangle *KSQB* la somme des termes les plus bas après 1, & ne trouvant que $- x$, on en deduit suivant la regle $- \frac{1}{2} xx$ pour le troisieme terme de la valeur de y.

Pour trouver le quatrieme terme, on substitue $1 + x - \frac{1}{2} xx$ pour y dans le terme $\frac{1}{y}$, & trouvant $\frac{1}{y} = 1 - x + \frac{3}{2} xx$ &c., on ecrit cette valeur, ou plu-

tôt ſon dernier terme $+\frac{3}{2}xx$ dans le rectangle *RSQF*, après $1-x$, ſous $-xx$. On prend la ſomme des termes $-xx+\frac{3}{2}xx=\frac{1}{2}xx$, qu'on multiplie par x, pour avoir le produit $\frac{1}{2}x^3$. On diviſe ce produit par l'expoſant 3, & on ecrit le quotient $+\frac{1}{6}x^3$ pour le quatrieme terme de la valeur de y. On peut continuer de la même maniere pour les autres termes.

Il n'eſt pas non plus neceſſaire que les dimenſions de l'autre variable ſoient toujours poſitives. Car de l'equation $\frac{dy}{dx}=3+2y-\frac{yy}{x}$ on tire $y=3x-\frac{3}{2}xx+2x^3$ &c. comme on le voit (*Fig.* 8.).

L'equation $\frac{dy}{dx}=-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{xx}$ donnera auſſi $y=\frac{1}{x}$ ſans la reduction des termes $\frac{1}{x}$, & $\frac{1}{xx}$, en faiſant l'operation comme elle eſt marquée (*Fig.* 9.).

Il faut obſerver icy en paſſant que, dans le nombre infini de ſeries, qu'on peut trouver pour exprimer la valeur de la quantité relative par la correlative, il s'en trouve ſouvent qui ſont finies, comme dans l'exemple precedent; il n'eſt pas même difficile de trouver

ces suites finies, en prenant une constante arbitraire pour le premier terme de la serie, & en lui donnant après la solution quelque valeur convenable, pour rendre finie la serie entiere.

CCCLXIII.

On peut encore, assez facilement & sans aucune reduction du terme $\frac{y}{2x}$, tirer la valeur de y de l'equation $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + 1 - 2x + \frac{1}{2}xx$, en supposant, a la maniere des analystes, qu'on a trouvé ce qu'on cherche. Ainsi après avoir disposé les termes de l'equation a l'ordinaire, on met $2ex$ pour le premier terme de la valeur de y, prenant $2e$ pour le coefficient numerique qui n'est pas encore connû. On substitue $2ex$ au lieu de y dans le terme $+\frac{y}{2x}$ du rectangle vertical *ERSP* (*Fig.* 10.), on trouve $+\frac{y}{2x} = e$, qu'on ecrit a côté du terme $\frac{y}{2x}$ au premier rang dans le rectangle *RSQF*; on fait la somme $1 + e$ des termes les plus bas du rectangle *KSQB*; on la multiplie par la correlative x, & ayant divisé le produit $x + ex$ par l'exposant 1 de x, on a le quotient $x + ex$ pour le premier terme de la valeur de y. Puis donc qu'on a supposé ce

ce premier terme $=2ex$, on aura $x+ex=2ex$, d'où l'on tire $e=1$. Donc le premier terme de la valeur réelle de y sera $2x$. On se sert de même d'un terme supposé $2fxx$ pour representer le second terme de la valeur de y; on substitue $2fxx$ au lieu de y dans le terme $+\frac{y}{2x}$ du rectangle $ERSP$, & trouvant $\frac{y}{2x}=+fx$, on ecrit $+fx$ a côté du terme $+\frac{y}{2x}$ & au second rang dans le rectangle $RSQF$. Ensuite on prend la somme $-2x+fx$ des termes correspondans dans le rectangle $KPQB$; on la multiplie par x, pour avoir le produit $-2x^2+fx^2$, qu'on divise par l'exposant 2, & le quotient $-x^2+\frac{1}{2}fx^2$ doit être le second terme de la valeur de y; puis donc que nous avons supposé ce second terme $=2fxx$, nous aurons l'equation $-x^2+\frac{1}{2}fx^2=2fx^2$, d'où l'on tire $f=-\frac{2}{3}$. Donc le second terme de la valeur réelle de y sera $-\frac{4}{3}xx$. On trouve de la même maniere que le coefficient supposé $2g$ dans le troisieme terme donne $g=\frac{1}{10}$, & que le troisieme terme de la valeur réelle de y est $+\frac{1}{5}x^3$.

Enfin on trouve de même que le coefficient supposé $2b$ du quatrieme terme est zero; d'où l'on conclut qu'il n'y a plus d'autres termes, que l'operation se termine là, & que la valeur réelle de y est exactement $2x - \frac{4}{3}xx + \frac{1}{5}x^3$.

On resoudra a peu prés de la même maniere l'equation $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{4x}$, en supposant $y = ex^n$, le coefficient e, & l'exposant n etant des constantes inconnues; car, en substituant ex^n au lieu de y dans l'equation proposée, on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{3ex^n}{4x}$, ou $dy = \frac{3ex^{n-1}dx}{4}$, &, en intégrant de part & d'autre, $y = \frac{3ex^n}{4n}$; par consequent $n = \frac{3}{4}$, & e indeterminé. On aura donc $y = ex^{\frac{3}{4}}$, & on pourra donner au coefficient e telle valeur qu'on voudra.

CCCLXIV.

On peut quelque fois commençer l'operation par la plus haute puissance de la quantité correlative, en descendant par degrés aux puissances inferieures, comme dans cette equation $\frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx} + \frac{1}{xx} + 3 + 2x - \frac{4}{x}$:

Car, après avoir diſpoſé les termes d'une maniere contraire a l'ordinaire, en commençant par le plus haut terme $2x$, comme on le voit (*Fig.* 11.), on trouvera ſuivant la methode xx pour le premier terme de la valeur de y. Enſuite pour trouver le ſecond terme, on ſubſtituera xx pour y dans le terme $+\frac{y}{xx}$ du rectangle *ERSP*, & on ecrira ſa valeur 1 dans le rectangle *RSQF* au ſecond rang ſous le terme $+3$, on prendra la ſomme 4 des deux termes correſpondans $+1$, & $+3$, on la multipliera par x, & ayant diviſé le produit $4x$ par l'expoſant 1, on aura $+4x$ pour le ſecond terme. On trouvera l'un après l'autre les autres termes de la valeur de y en ſuivant la regle préſcritte.

CCCLXV.

PROBLEME III. Trouver les intégrales des equations de la troiſieme claſſe, c'eſt a dire, de celles qui contiennent plus de deux variables avec leurs premieres différences, & leurs produits quelconques.

SOLUTION. 1.° Lorſque l'equation propoſée contient trois variables, ſi la relation de deux de ces variables eſt determinée par l'etat de la queſtion, on ſe ſervira de cette relation donnée, pour trouver le rapport des différences de ces deux variables, ce qui don-

nera le moyen de chasser de l'equation proposée l'une ou l'autre de ces variables, & sa différence. On reduira par là l'equation de trois variables a deux, & on la resoudra par le Probleme I., ou II. Mais si la relation de deux des trois variables n'est pas determinée par l'etat de la question, on pourra former cette relation a volonté, & deduire le rapport des différences, pour chasser ensuite de l'equation proposée une des variables avec sa différence, & la reduire a une equation a deux variables, qu'on resoudra par les Problemes precedents.

2.° Si l'equation proposée contient quatre variables, on la reduira a une equation de trois variables seulement, lorsque la relation entre deux de ces variables sera donnée par l'etat de la question, & on resoudra ensuite l'equation, comme nous venons de le dire. Mais, si la relation entre deux variables n'est pas donnée par l'etat de la question, on pourra choisir cette relation a volonté, & chasser une des quatre variables de l'equation, qu'on resoudra ensuite comme dans le cas precedent. On operera de la même maniere sur les equations qui contiendront plus de quatre variables, en reduisant celles de cinq variables a quatre, celles de six variables a cinq, & ainsi des autres.

Soit proposée l'equation a trois variables $2dx - dz + xdy = o$, dans laquelle la relation entre deux

de ces variables n'eſt point determinée. On formera donc a volonté une relation entre deux de ces variables: par exemple, entre x & y, en ſuppoſant $x=y$, ou $x=yy$, &c., ou bien entre y & z, en ſuppoſant $2y = a + z$ &c. Nous choiſirons icy la relation $x=yy$, qui donnera, en différentiant, $dx = 2ydy$. Subſtituant donc $2ydy$ pour dx, & yy pour x dans l'equation propoſée, on aura $4ydy - dz + yydy = 0$, d'où l'on tire en intégrant $2yy - z + \frac{1}{3}y^3 = 0$, ou $z = 2yy + \frac{1}{3}y^3$ pour la relation de z & de y. Et en ecrivant x pour yy, & $x^{\frac{3}{2}}$ pour y^3, on aura $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$. Ainſi dans le nombre infini de relations, que peuvent avoir les trois variables x, y, z, nous en avons trouvé une qui eſt repreſentée par ces equations $x=yy$, $2yy + \frac{1}{3}y^3 = z$, & $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

CCCLXVI.

REMARQUE. Il nous reſte quelques reflexions a faire ſur l'application des methodes precedentes.

1.° Lorſque l'equation différentielle propoſée ne contient que deux variables x & y avec leurs premieres différences dx & dy elevées a des puiſſances ou produits dx^2, dx^3 &c., dy^2, dy^3, &c., $dxdy$, dx^2dy,

&c. On se servira des methodes du second Chapitre pour la reduire a la forme $\frac{dy}{dx}=z$, ou $\frac{dx}{dy}=z$, z etant une suite finie ou infinie de termes composés des variables x, y, & de constantes.

2.° Après avoir reduit l'equation a cette forme, ou, ce qui est la même chose, a la forme $Adx+Bdy=o$, dans laquelle A & B sont des fonctions de x, de y, & de constantes, on cherchera par la methode du Chapitre I. si la quantité différentielle $Adx+Bdy$ est exacte; &, si elle se trouve complette, on l'intégrera par les methodes aisées du même Chapitre. Si elle n'est pas complette, on cherchera le facteur commun pour la rendre complette. Mais, si on trouve trop de difficulté dans cette recherche du facteur commun, on aura recours aux methodes des Problemes I. & II. du second Chapitre, pour trouver au moins par approximation la valeur de y en x, ou celle de x en y par des series, entre lesquelles on choisira celles qui seront les plus simples, ou qui convergeront le plus vîte.

3.° Quand l'equation différentielle contiendra plus de deux variables, on examinera si on peut determiner par l'etat de la question quelque nouvelle relation entre quelques-unes de ces variables, & alors on se servira de cette relation pour chasser une de ces variables &

K B

$1 - 3x + xx$

F

$\cdots\cdots + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$ &c.

Fig. 1

$\cdots\cdots\cdots + xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5$ &c.

S Q

$1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5$ &c.

M

$x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$ &c.

H D

K B

1

F

$\cdots\cdots + \frac{x}{a} + \frac{xx}{2aa} + \frac{x^3}{2a^3} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$ &c.

$\cdots\cdots\cdots + \frac{xx}{aa} + \frac{x^3}{2a^3} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$ &c.

Fig. 2

$\cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$ &c.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$ &c.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{x^5}{a^5}$ &c.

S Q

$1 + \frac{x}{a} + \frac{3xx}{2aa} + \frac{2x^3}{a^3} + \frac{5x}{2a^4} + \frac{3x^5}{a^5}$ &c.

M

$x + \frac{xx}{2a} + \frac{x^3}{2aa} + \frac{x^4}{2a^3} + \frac{x^5}{2a^4} + \frac{x^6}{2a^5}$ &c.

H D

B

$xx - 8x^3 - 10x^4 - 12x^5 - 14x^6$ &c.

F

$\cdots - \frac{9}{2}x^3 - 6x^4 - \frac{75}{8}x^5 - \frac{273}{20}x^6$ &c.

$\cdots\cdots 2x^4 - 12x^5 - \frac{75}{4}x^6$ &c.

$\cdots\cdots - 12x^5 - 16x^6$ &c.

$\cdots\cdots - 15x^6$ &c.

Fig. 3

$\cdots\cdots + 9x^4 + 6x^5 + \frac{107}{8}x^6$ &c.

$\cdots\cdots - \frac{9}{4}x^5 - 6x^6$ &c.

$\cdots\cdots - \frac{27}{8}x^6$ &c.

Q

$xx - \frac{25}{2}x^3 - \frac{91}{4}x^4 - \frac{333}{8}x^5 - \frac{367}{5}x^6$ &c.

M

$x^3 - \frac{25}{8}x^4 - \frac{91}{20}x^5 - \frac{111}{16}x^6 - \frac{367}{35}x^7$ &c.

D

$x^5 + \frac{107}{8}x^6$ &c.

T

B

$+ 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^{3}$

F

$\ldots\ldots\ldots - 2y^{3} + 4y^{\frac{7}{2}} - 2y^{4}$ &c.

Fig. 4

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{1}{20}y^{4}$ &c.

Q

$y + 7y^{\frac{5}{2}} + 0 + 4y^{\frac{7}{2}} - \frac{41}{20}y^{4}$ &c.

M

$^{3} + 2y^{\frac{7}{2}} \quad + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} - \frac{41}{100}y^{5}$ &c.

D

$y + 2y^{\frac{5}{2}} - y^{3}$ &c.

T

B

$1 - 3x + xx$

F

$1 + 2x \quad + x^{3} + \frac{1}{4}x^{4}$ &c.

Fig. 5

$+ x + 2x^{2} \quad + x^{4}$ &c.

Q

$2 + 0 + 3x^{2} + x^{3} + \frac{5}{4}x^{4}$ &c.

M

$2x \quad + x^{3} + \frac{1}{4}x^{4} + x^{5}$ &c.

D

Fig. 6

B	
$+1 - 3x + xx$	
F	
$+a + x - xx + \frac{1}{3}x^3$ &c.	
$+ax + axx + \frac{2}{3}ax^3$ &c.	
$+ax + xx - x^3$ &c.	
$+axx + ax^3$ &c.	
S	Q
$+1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3$ &c.	
$+a + 2ax + 2axx + \frac{5}{3}ax^3$ &c.	
	M
$a + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4$ &c.	
$+ax + axx - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{5}{12}ax^4$ &c.	
H	D

Fig. 7

K		B
R	$\quad \quad - xx$	F
$\frac{1}{y}$	S ... $1 - x + \frac{3}{2}xx$ &c.	Q
somm	... $1 - x + \frac{1}{2}xx$ &c.	N
	M	
$y =$	$1 + x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3$ &c.	D
	H	
$\frac{1}{y} =$	$1 - x + \frac{3}{2}xx$ &c.	T

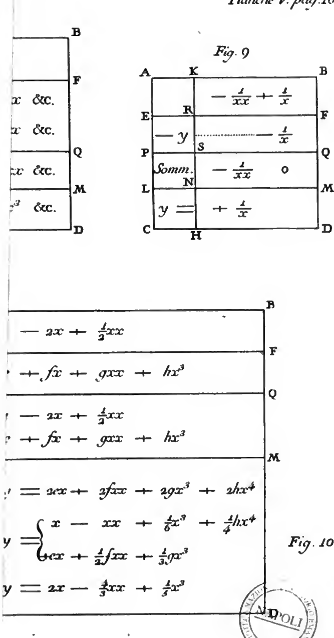

Fig. 9
A
K
B
$-\frac{1}{xx} + \frac{1}{x}$
E
R
F
$-y$
$-\frac{1}{x}$
S
P
Q
Somm.
$-\frac{1}{xx}$
o
N
L
M
$y =$
$+\frac{1}{x}$
C
H
D
B
F
Q
M
D
&c.
&c.
&c.
&c.
$-2x + \frac{1}{2}xx$
$+ fx + gxx + hx^3$
$-2x + \frac{1}{2}xx$
$+ fx + gxx + hx^3$
$= 2ex + 2fxx + 2gx^3 + 2hx^4$
$y = \begin{cases} x - xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}hx^4 \\ ex + \frac{1}{2}fxx + \frac{1}{3}gx^3 \end{cases}$
$y = 2x - \frac{4}{3}xx + \frac{1}{5}x^3$
Fig. 10

Planche VI pag. 103

B

$\frac{4}{x} + \frac{1}{xx}$

F

$\frac{4}{x} \quad - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4}$ &c.

Q

$0 + \frac{1}{xx} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4}$ &c.

M

$- \frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} - \frac{1}{6x^3}$ &c.

D

Fig. 11

$\ldots 2) \quad + \frac{b^3 a x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} +$ &c.

$+ \frac{b^3 C x^2}{2} +$ &c.

$\ldots 2) \quad + \frac{b^3 a x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} +$ &c.

$+ \frac{b^3 C x^2}{2} +$ &c.

Fig. 12

$\frac{\ldots m+3}{\ldots 2)(m+3)} + \frac{b^3 a x^{m+4}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} +$ &c.

$\ldots x^2 + \frac{b^3 C x^3}{6} +$ &c.

$\frac{{}^{3}x^{3m+4}}{)^{3}(2m+3)} + \frac{b^{3}a^{4}x^{4m+6}}{(m+1)^{4}(2m+3)^{2}} + \frac{\quad}{(\ldots}$

$+ \frac{4b^{3}a^{4}x^{4m+6}}{(m+1)^{4}(2m+3)(3m+5)} + \frac{\quad}{(n\ldots}$

$+ \frac{\quad}{(m+\ldots}$

$\frac{{}^{3}x^{3m+4}}{{}^{3}(2m+3)} + \frac{b^{3}a^{4}x^{4m+6}}{(m+1)^{4}(2m+3)^{2}} + \frac{\quad}{(m\ldots}$

$+ \frac{4b^{3}a^{4}x^{4m+6}}{(m+1)^{4}(2m+3)(3m+5)} + \frac{\quad}{(m\ldots}$

$+ \frac{\quad}{(m+\ldots}$

Fig. 13

$\frac{2b^{2}a^{3}x^{3m+5}}{+1)^{3}(2m+3)(3m+5)} + \frac{b^{3}a^{4}x^{4m+7}}{(m+1)^{4}(2m+3)^{2}(4m+7)} + \text{\&c.}$

$+ \frac{4b^{3}a^{4}x^{4m+7}}{(m+1)^{4}(2m+3)(3m+5)(4m+\ldots} + \text{\&c.}$

$\frac{\quad}{\ldots 9)} + \text{\&c.}$

$\frac{b^{2}a^{4}x^{4m+6}}{(m+1)^{4}(2m+3)^{2}} + \frac{4b^{3}a^{5}x^{5m\ldots}}{(m+1)^{5}(2m+3)^{2}\ldots}$

$\frac{4b^{2}a^{4}x^{4m+6}}{(m+1)^{4}(2m+3)(3m+5)} + \frac{2b^{3}a^{5}x^{5m\ldots}}{(m+1)^{5}(2m+3\ldots}$

$+ \frac{8b^{3}a^{5}x^{5m\ldots}}{(m+1)^{5}(2m+3)(3m\ldots}$

ſa différence de l'equation. Si on ne trouve point de nouvelle relation entre deux variables, on examinera par les methodes du Chapitre I. ſi l'equation n'eſt pas impoſſible en general, comme il arrive ſouvent, & alors on n'en cherchera point l'intégrale generale. Mais, ſi elle eſt poſſible, on examinera ſi elle eſt exacte, & alors on l'intégrera par les methodes du Chapitre I.; ou bien on cherchera a la rendre complette en la multipliant par un facteur commun, ſi on peut le trouver; ſinon, on aura recours a la methode du Probleme precedent. Ce Chapitre renferme un Commentaire ſur la methode elegante que M. Newton ne fait que propoſer dans ſon Traité des Fluxions; & nous l'avons expliquée d'autant plus volontiers, qu'elle nous a parû très-belle, & que nous ne ſçavons pas qu'elle ait été demontrée par Perſonne.



CHAPITRE III.

De la separation des indeterminées dans les equations differentielles, qui ne contiennent que les premieres différences des variables, ou leurs puissances, pour les intégrer ensuite par les methodes de la premiere Partie.

CCCLXVII.

Toutes les equations différentielles du premier ordre, qui ne contiennent que deux variables separées x & y, peuvent se reduire a cette forme generale $Xdx = Ydy$, dans laquelle X represente une fonction quelconque de x sans y; & Y une fonction de y sans x. En intégrant de part & d'autre par les methodes de la premiere Partie, on aura $S.Xdx = S.Ydy$, plus ou moins une constante arbitraire, ou determinée par l'etat de la question. Si ces deux intégrales sont des fonctions algebriques de x, & de y, l'equation $S.Xdx = S.Ydy$ sera aussi algebrique, & ses racines donneront les valeurs de x par y, & celles de y par x. Si cette equation n'est point algebrique, on pourra toujours trouver x par y, ou y par x, au moyen des quadratures des courbes. Car $S.Xdx$ sera l'aire d'une courbe, dont l'abscisse sera x, & l'ordonnée perpendiculaire

laire X; & de même $S.Ydy$ ſera l'aire d'une autre courbe, qui aura y pour abſciſſe, & Y pour ordonnée. En ſuppoſant donc qu'on ait decrit ces deux courbes, ſi on determine l'abſciſſe x dans la premiere, on aura l'aire $S.Xdx$, qui correſpond a cette abſciſſe; &, en prenant dans l'autre courbe une aire egale a l'aire donnée $S.Xdx$, on aura l'abſciſſe y, qui reſpond a cette aire dans la ſeconde courbe. Mais il ſera plus court & plus exact dans la pratique de reduire dans ces cas les deux intégrales en ſeries, & d'en faire une equation, dont on trouvera les racines par les methodes connües.

CCCLXVIII.

Si l'equation, dont on veut ſeparer les variables x & y renferme les puiſſances dx^2, dx^3, &c. dy^2, dy^3, &c. des premieres différences de ces variables, il faudra la reduire a une equation différentielle du premier ordre, ou qui ne contienne plus que les ſimples différences dx & dy. On pourra toujours le faire par la methode que nous avons expliquée au commençement du Chapitre precedent, en ſubſtituant une variable z au lieu du rapport $\frac{dx}{dy}$, ou $\frac{dy}{dx}$ dans l'equation propoſée, & en cherchant enſuite les racines de l'equation, qui reſulte de cette ſubſtitution, & dans laquelle on conſidere z comme l'inconnuë; par ce moyen nous redui-

ſons la queſtion de la ſeparation des indeterminées aux equations différentielles du premier ordre, qui ne contiennent plus de puiſſances, ny de produits des premieres différences des variables.

CCCLXIX.

On n'a point trouvé juſqu'a preſent de methode generale pour ſeparer les variables dans toutes les equations différentielles, même du premier ordre; mais lorſqu'on ſe propoſe d'intégrer une equation de cette ſorte, & qu'on ne trouve point de moyens pour en ſeparer les indeterminées, ou que les methodes, dont on pourroit ſe ſervir, ſont trop difficiles, ou trop longues dans la pratique, on peut toujours avoir recours aux methodes, que nous avons expliquées dans les Chapitres precedents pour intégrer, ſans ſeparer les variables avant l'intégration. Il eſt même remarquable que la methode de M. Newton eſt generale, pour les ſeparer par l'intégration même, & pour trouver en même tems les valeurs d'une variable par l'autre exactement, ou du moins par approximation. De plus en prenant bien l'eſprit de cette methode, on pourroit l'appliquer aux equations, dans leſquelles les variables ont des expoſans en lettres, comme celles-cy, $dy = ax^m dx + byx^n dx$; $dy = ax^m dx + by^2 x^n dx$; &c., parmi leſquel-

les il s'en trouve, dont les variables n'ont jamais pû être ſeparées: nous en parlerons dans la ſuite.

CCCLXX.

Les principaux moyens dont on ſe ſert pour la ſeparation des variables, ſont les regles ordinaires de l'Algebre, & les transformations, ſurtout celles qui ſe font par la ſubſtitution de variables avec des expoſans & des coefficiens indeterminés, qu'on determine enſuite par les conditions qu'il faut remplir pour la ſeparation qu'on cherche. Ces moyens ſe preſentent quelque fois, comme d'eux mêmes. Par exemple on voit facilement que les variables ſe ſeparent dans l'equation $\frac{x^m dx}{(a+by^n)^r} = \frac{y^p dy}{(f+gx^q)^r}$, par la ſimple multiplication, qui donne $x^m dx(f+gx^q)^r = y^p dy(a+by^n)^r$. Dans l'equation $x^m dx(a+by^n)^r = y^p dy(f+gx^q)^r$, par la ſimple diviſion, qui donne $\frac{x^m dx}{(f+gx^q)^r} = \frac{y^p dy}{(a+by^n)^r}$; dans l'equation $x^2dx^2 + axydxdy = bdy^2$, en ajoutant de part & d'autre $\frac{1}{4}aayydy^2$, pour avoir $x^2dx^2 + axydxdy + \frac{1}{4}aayydy^2 = \left(\frac{1}{4}a^2y^2 + b\right)dy^2$, &, en tirant la racine

quarrée, $xdx + \frac{1}{2}aydy = dy\left(\frac{1}{4}a^2y^2 + b\right)^{\frac{1}{2}}$; dans l'equation $adx = ydy - xdy$, en ſuppoſant $y - x = z$, ou $y = x + z$; ce qui donne $dy = dx + dz$, &, par la ſubſtitution, $adx = zdz + zdx$, d'où l'on tire $adx - zdx = zdz$, & $dx = \frac{zdz}{a-z}$; dans l'equation $aadx = (x+y)^2 dy$, en ſuppoſant $x + y = z$, d'où l'on tire $dx = dz - dy$, &, par ſubſtitution, $aadz - aady = z^2 dy$, ou $aadz = (aa + zz)dy$, & enfin $\frac{aadz}{aa+zz} = dy$.

CCCLXXI.

Les moyens de ſeparation dependent fort ſouvent de l'uſage, & de l'adreſſe du Calculateur. Il n'eſt pas toujours facile de les trouver, lors même qu'ils ſont poſſibles; & il y a des equations, qui paroîſſent aſſez ſimples & qui ſont celebres, par ce qu'on n'a pû juſqu'a preſent en ſeparer les indeterminées par une methode generale: telle eſt celle-cy $dy = ax^m dx + by^2 x^n dx$, qui eſt connûe ſous le nom d'*Equation du Comte Riccati*. Il ne nous reſte donc qu'a expliquer les methodes, qui ont le plus d'etendüe, quoiqu'elles ne ſoient pas abſolument generales. Nous commençerons par la ſeparation des indeterminées dans les equations homo-

genes, c'eſt a dire, dans leſquelles la ſomme des dimenſions des variables x, y, z, *&c.* eſt la même dans chacun des termes de l'equation, ſoit que ces variables ſoient mêlées, ſoit qu'elles ſoient ſeparées; telles ſont les equations $x^2dy + ay^2dx = bxydy + cz^2dx + fzydz$; $ax^{\frac{1}{2}}ydx + y^{\frac{1}{2}}xdx = x^{\frac{3}{2}}dy$; $dx\sqrt{xx+yy} + dy\sqrt{ay^2+fxy} = xdy + by^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$.

CCCLXXII.

Probleme I. Separer les indeterminées dans les equations homogenes a deux variables x & y.

Solution. Toutes ces equations ſe reduiſent a la forme $Adx + Bdy = 0$, dans laquelle A, B repreſentent des fonctions homogenes de x, & de y, c'eſt a dire, des fonctions, dans leſquelles la ſomme des dimenſions de x, & de y eſt la même. Soit la ſomme de ces dimenſions repreſentée par n, & ſoit fait $y = ux$, ou $\frac{y}{x} = u$; il eſt clair que les fonctions A, B ſe reduiront a cette forme $A = x^n V$, & $B = x^n V'$, les expreſſions V, V' deſignant des fonctions de u ſeulement, ou de $\frac{y}{x}$. Car puiſque A, B ſont des fonctions homogenes de la dimenſion n, & V, V' des fonctions de u ſeulement, ou de $\frac{y}{x}$; il eſt evident que V, V' doivent être des

fonctions de dimenfion nulle, c'eft a dire, dans lefquelles y & x ayent le même nombre de dimenfions au numerateur, & au denominateur. Cela etant pofé, on aura $x^n V dx + x^n V' dy = o$, en fubftituant au lieu de A, & B leurs valeurs refpectives $x^n V$, $x^n V'$, & en divifant par x^n, on aura $V dx + V' dy = o$, mais $dx = \frac{udy - ydu}{u^2}$: donc $\frac{Vudy - Vydu}{u^2} + V'dy = o$, & $Vudy - Vydu + u^2 V'dy = o$, & par confequent $Vudy + u^2 V'dy = Vydu$, d'où l'on tire $\frac{dy}{y} = \frac{Vdu}{Vu + u^2 V'}$. Or V, V' ne renferment d'autre variable que u. Donc les variables font feparées generalement dans ces fortes d'equations.

On voit bien que V, V' etant des fonctions de u feulement, on pourroit faire $y = u^n x$, au lieu de $y = ux$, la feparation des variables fe feroit de la même maniere, on auroit alors $\frac{dy}{y} = \frac{nVu^{n-1}du}{u^{2n}V' + Vu^n}$. Il eft clair qu'on pourroit auffi au lieu de u prendre une fonction quelconque de u; par exemple $\sqrt{aa + uu}$; ce qui rend quelque fois la feparation plus commode, furtout dans les différentielles qui renferment des radicaux; il faut dans ces cas faire le choix des expofans ou des fonctions, qui rendent la transformation plus fimple.

EXEMPLE I. Soit l'equation $y^3 dx + y^2 x dy + b x^3 dy = o$, on aura en comparant avec la forme $A dx + B dy = o$, $A = y^3$, $B = y^2 x + b x^3$, $n = 3$, & par consequent $A = x^3 V$, & $B = x^3 V'$; d'où l'on tire $V = \frac{A}{x^3}$, & $V' = \frac{B}{x^3}$; par consequent $V = \frac{y^3}{x^3}$, $V' = \frac{y^2 x + b x^3}{x^3} = \frac{y^2}{x^2} + b$; or, a cause de $\frac{y}{x} = u$, on aura $V = u^3$, & $V' = u^2 + b$, lesquelles valeurs, etant substituées dans l'equation $\frac{V du}{V u + u^2 V'} = \frac{dy}{y}$, donnent $\frac{u du}{2 u^2 + b} = \frac{dy}{y}$, & en intégrant $L.y = \frac{1}{4} L.(2u^2 + b) + L.C$, & $y = C(2u^2 + b)^{\frac{1}{4}}$, ou $y^4 = C^4 (2u^2 + b)$, &, en remettant pour u sa valeur $\frac{y}{x}$, on aura enfin $y^4 = C^4 \left(\frac{y^2}{x^2} + b\right)$.

EXEMPLE II. Soit l'equation différentielle $a x dy + dx \sqrt{xx + yy} = o$, dans laquelle les variables n'ont qu'une dimension. En faisant $x = y \sqrt{uu - 1}$, on aura $dx = dy \sqrt{uu - 1} + \frac{y u du}{\sqrt{uu - 1}} = \frac{dy(uu - 1) + y u du}{\sqrt{uu - 1}}$; donc l'equation $a x dy + dx \sqrt{xx + yy} = o$ se change en cette

autre $aydy\sqrt{uu-1}+\frac{[dy(uu-1)+yudu]\sqrt{xx+yy}}{\sqrt{uu-1}}=o$. Mais $\sqrt{xx+yy}=yu$, à cause de $x=y\sqrt{uu-1}$; donc l'equation se reduit à celle-cy, $\frac{dy}{y}+\frac{uudu}{u^3+auu-u-a}=o$, différentielle rationelle qu'on intégrera par les methodes du Chapitre IV. de la premiere Partie; en la reduisant aux différentielles logarithmiques, & multipliant par $2aa-2$, on aura $\frac{2aa-2}{y}dy+\frac{2aadu}{u+a}-\frac{(a+1)du}{u+1}+\frac{(a-1)du}{u-1}=o$, dont l'intégrale est $(2aa-2)L.y+2aaL.(u+a)-(a+1)L.(u+1)+(a-1)L.(u-1)=L.C$, ou bien $y^{2aa-2}\times(u+a)^{2aa}\times(u+1)^{-a-1}\times(u-1)^{a-1}=C$, &, en substituant la valeur de u, on aura $y^{2aa-2}\times\left(\frac{\sqrt{xx+yy}+ay}{y}\right)^{2aa}\times\left(\frac{\sqrt{xx+yy}+y}{y}\right)^{-a-1}\times\left(\frac{\sqrt{xx+yy}-y}{y}\right)^{a-1}=C$. Si on observe dans cette equation que le facteur y^{2aa-2} du premier membre a pour exposant $2aa-2$, & que dans les autres facteurs la quantité y qui se trouve au denominateur est elevée aux exposans $2aa$, $-a-1$, & $a-1$ respectivement dont la somme $=2aa-2$, on voit qu'en divisant l'equation

l'equation fe reduit a celle-cy $(\sqrt{xx+yy}+ay)^{2aa}\times$ $(\sqrt{xx+yy}+y)^{-a-1}\times(\sqrt{xx+yy}-y)^{a-1}=C$, ou $(\sqrt{xx+yy}+ay)^{2aa}\times\frac{(\sqrt{xx+yy}+y)^{a-1}}{(\sqrt{xx+yy}+y)^{2a}}\times$ $(\sqrt{xx+yy}-y)^{a-1}=C$, ou $(\sqrt{xx+yy}+ay)^{2aa}$ $\times x^{2a-2}\times(\sqrt{xx+yy}+y)^{-2a}=C$, ou enfin $(\sqrt{xx+yy}+ay)^{aa}\times x^{a-1}\times(\sqrt{xx+yy}+y)^{-a}$ $=C^{\frac{1}{2}}$.

Nous nous fommes arrêtés fur cette equation, laquelle, quoique fimple en apparence, ne laiffe pas que de demander des calculs affez longs. La fubftitution de $x=y\sqrt{uu-1}$ a delivré tout d'un coup cette equation de radicaux, au lieu qu'en faifant $x=yu$, on auroit eû la différentielle irrationelle $\frac{dy}{y}+\frac{du\sqrt{uu+1}}{au+u\sqrt{uu+1}}$ $=0$.

EXEMPLE III. Soit la différentielle $a\sqrt{y^2dy^2-2yxdxdy+y^2dx^2}=yxdy-y^2dx$ qui paroît compliquée, mais dans laquelle il fera facile de feparer les variables par la fimple fubftitution de $x=uy$, de laquelle on tire $a=\frac{-y^2du}{\sqrt{dy^2-u^2dy^2+y^2du^2}}$ &

$a^2dy^2 - a^2u^2dy^2 + a^2y^2du^2 = y^4du^2$; donc $y^4du^2 - a^2y^2du^2 = a^2dy^2 - a^2u^2dy^2$, & par l'extraction des racines $\frac{du}{\sqrt{1-uu}} = \frac{ady}{y\sqrt{y^2-a^2}}$, equation dans laquelle les variables font feparées, & que nous avons integrée dans la premiere Partie Chap. II.

CCCLXXIII.

PROBLEME II. Intégrer les equations différentielles homogenes, a trois & tant de variables qu'on voudra, lorfque ces equations ne renferment point de conftantes.

SOLUTION. Soit $Adx + Bdy + Cdz = o$ l'equation a intégrer, dans laquelle A, B, C font des fonctions homogenes des variables x, y, z fans conftantes. Nous ne lui donnons que trois variables, par ce que celles qui en ont un plus grand nombre ne demandent pas d'autres calculs. On s'affûrera d'abord par les regles du premier Chapitre, que l'equation eft poffible; car, fi elle fe trouvoit abfurde, il faudroit l'abandonner. Enfuite on fera $y = xu$, & $z = xt$, & on fubftituera ces valeurs de y & de z dans toute l'equation. Il eft evident, qu'en fubftituant xu pour y, & xt pour z dans la fonction A, qui renferme des x, des y, & des z fans conftantes, cette fonction fe changera en une

autre, qui ſera compoſée de x elevée a une puiſſance du degré de la fonction A & multipliée par une fonction de u & de t: de même la fonction B, qu'on ſuppoſe de la même dimenſion que la fonction A, ſe changera en une autre fonction compoſée de la même puiſſance de x, multipliée par une autre fonction de u, & de t, & ainſi de la fonction C. Suppoſant donc que m repreſente le degré des fonctions A, B, C, & que F, G, H ſoient des fonctions différentes de u & de t: ſubſtituons $x^m F$ pour A, $x^m G$ pour B, & $x^m H$ pour C; mettons auſſi pour dy ſa valeur $xdu+udx$, & pour dz, ſa valeur $xdt+tdx$, il eſt evident qu'on aura la transformée ſuivante $x^m dx(F+Gu+Ht)+x^{m+1}Gdu+x^{m+1}Hdt=o$, ou, en diviſant tous les termes par x^{m+1}, $\frac{dx}{x}+\frac{Gdu+Hdt}{F+Gu+Ht}=o$. Or dans l'equation miſe ſous cette forme il eſt clair, que les x ſont ſeparées des u & des t ſans x, puiſque les fonctions F, G, H ne contiennent que des u, & des t ſans x. L'intégrale de cette equation ſera donc $L.x+S.\frac{Gdu+Hdt}{F+Gu+Ht}$ egalée a une conſtante; & puiſqu'on ſuppoſe qu'on a reconnû d'abord que l'equation propoſée etoit intégrable, & que nous venons de voir que ſon intégrale eſt toujours $L.x+S.\frac{Gdu+Hdt}{F+Gu+Ht}$, il faut neceſſairement que la différentielle $\frac{Gdu+Hdt}{F+Gu+Ht}$ ſoit complette. On trouvera donc ſon inté-

grale par les Problemes du Chapitre I., & l'ayant ajoutée au logarithme hyperbolique de x, on aura l'intégrale cherchée.

CCCLXXIV.

Corollaire I. De ce que l'equation $Adx + Bdy + Cdz = o$ s'est changée en $\frac{dx}{x} + \frac{Gdu + Hdt}{F + Gu + Ht} = o$, qui est une différentielle complette, on peut tirer tout de suite le facteur M, par lequel il auroit fallu multiplier tous ses termes pour l'intégrer sans la separation des indeterminées. Car il est aisé de voir que $Adx + Bdy + Cdz$ n'est devenüe cette même différentielle complette, qu'en divisant tous les termes par $x^{m+1} \times (F + Gu + Ht)$, ou, ce qui revient au même, par $xA + yB + zC$; puisque $x^{m+1}F = xA$, $x^{m+1}Gu = x^m Gux = Bux = By$, & $x^{m+1}Ht = x^m Htx = Ctx = Cz$. Donc $\frac{Adx + Bdy + Cdz}{Ax + By + Cz}$ est une différentielle complette; par consequent $\frac{1}{Ax + By + Cz}$ etoit le facteur M cherché, qui avoit disparû par l'egalité a zero, &, qui etant retabli, rend la différentielle complette.

CCCLXXV.

Corollaire II. On peut deduire de là aisément le beau Theoreme de M. Fontaine sçavoir, que;

si $Adx+Bdy+Cdz$ est une différentielle homogene sans constantes, & telle que m soit le degré des fonctions A, B, C, l'intégrale de cette différentielle sera $\frac{Ax+By+Cz}{m+1}$. Pour le demontrer, reprenons la quantité $x^m dx(F+Gu+Ht)+x^{m+1}Gdu+x^{m+1}Hdt$; qui est ce que devient $Adx+Bdy+Cdz$, en faisant $y=xu$, & $z=xt$; il est aisé de voir que, si cette quantité est intégrable, son intégrale ne peut être autre chose, que $\frac{x^{m+1}}{m+1}(F+Gu+Ht)$, que l'on a en intégrant le premier nombre $x^m dx(F+Gu+Ht)$, x seule variant, & qu'il ne faut lui ajouter aucune fonction de u & de t; puisque, si l'on en ajoutoit une, lorsqu'on la différentieroit ensuite, ce qui en viendroit ne seroit point multiplié par x^{m+1}, comme le sont les termes $x^{m+1}Gdu$, & $x^{m+1}Hdt$. Cela posé, remettons dans $\frac{1}{m+1}x^{m+1}(F+Gu+Ht)$ la fraction $\frac{y}{x}$ pour u, la fraction $\frac{z}{x}$ pour t, A pour $x^m F$, B pour $x^m G$, & C pour $x^m H$, & nous aurons $\frac{Ax+By+Cz}{m+1}$ pour l'intégrale de $Adx+Bdy+Cz$.

CCCLXXVI.

COROLLAIRE III. Puiſque $Adx + Bdy + Cdz$ &c. etant des fonctions homogenes, comme dans le Corollaire precedent, on a toujours l'intégrale $\frac{Ax + By + Cz \text{ \&c.}}{m+1}$, il s'enſuit que, pour avoir l'intégrale de ces ſortes de différentielles, il ſuffit de ſubſtituer a la place de dx, dy, dz &c. leurs variables reſpectives, & diviſer ce qui en provient par le nombre qui exprime le degré de dimenſion de cette fonction ainſi reduite. Suppoſons que V ſoit une fonction homogene de x, y, z, enſorte que $dV = Adx + Bdy + Cdz$, on aura toujours $V = \frac{Ax + By + Cz}{n}$, en ſuppoſant que n ſoit la dimenſion homogene de cette fonction. Il eſt evident que le nombre n eſt egal a $m + 1$, puiſque par la ſubſtitution des variables a la place de leurs différentielles, le degré de dimenſion doit croître d'une unité. Nous eclaircirons ce Corollaire par quelques exemples.

1.° Soit $dV = \frac{2y^3dy - 3yyxdy + 3yxxdx - 2x^3dx + y^3dx - x^3dy}{(y-x)^2}$; en ſubſtituant x pour dx, & y pour dy, on aura, en diviſant par 2, degré de la dimenſion homogene $\frac{2y^4 - 2y^3x + 2yx^3 - 2x^4}{2(y-x)^2} = \frac{y^3 + x^3}{y - x} = V$.

2.° Soit $dV = \frac{-4ydy + 4xdx}{(yy+xx)^3}$, on aura, en faisant les mêmes substitutions, $\frac{-4y^2+4xx}{(yy+xx)^3} = nV$, &, en divisant par n, qui dans ce cas devient -4, on aura $\frac{yy-xx}{(yy+xx)^3} = V$.

3.° Soit $dV = 2xdx L. \frac{y+x}{y-x} + \frac{2xx(ydx-xdy)}{yy-xx}$; on aura, en substituant, & en divisant par 2 degré de la dimension $V = xx L. \frac{y+x}{y-x}$.

On voit par ces Exemples, qu'on pourra intégrer facilement par cette voie toutes les différentielles de cette forme, & d'un nombre quelconque de variables; ce qui deviendroit souvent trè-penible par d'autres methodes.

Il est evident, que les deux Corollaires precedens subsisteront, en supposant un nombre quelconque de fonctions B, C, &c. $= o$, & par consequent supposant que V soit une fonction homogene de la seule variable x. On auroit dans ce cas $V = ax^n$, & en différentiant $dV = nax^{n-1}dx$; on auroit, substituant x a la place de dx, & divisant par n, l'intégrale precedente ax^n.

CCCLXXVII.

PROBLEME III. Rendre homogene l'equation generale de ſon degré $(x+ay)dx+(bx+cy+f)dy=0$, pour l'intégrer par la ſeparation des indeterminées.

SOLUTION. 1.° Si les coefficiens a & b etoient les mêmes & avec les mêmes ſignes dans cette equation, on n'auroit pas beſoin de ſeparer les indeterminées pour l'intégrer, puiſqu'alors $xdx \pm a(ydx+xdy) + cydy+fdy=0$, & ſon intégrale $\frac{1}{2}xx \pm axy + \frac{1}{2}cyy+fy=C$ conſtante.

2.° Si le terme f etoit nul, l'equation ſeroit homogene, & on auroit ce qu'on cherche.

3.° Si f n'eſt point zero, ny $a=b$, ny de même ſigne, on ſuppoſera $x=z+p$, & $y=u+q$; z & u etant deux nouvelles variables, & p,q deux conſtantes indeterminées, ou arbitraires; d'où l'on tirera $dx=dz$, & $dy=du$, & ſubſtituant ces valeurs dans l'equation propoſée, on la changera en $(z+au+p+aq)dz+(bz+cu+bp+cq+f)du=0$. Or cette transformée ſeroit homogene, ſi les termes de quantités conſtantes $p+aq$, & $bp+cq+f$ etoient egaux a zero, puiſqu'alors l'equation deviendroit $(z+au)dz+(bz+cu)du=c$. Il faut donc ſuppoſer $p+aq=0$, &

$bp+$

$bp+cq+f=o$; d'où l'on tire $p=-\frac{af}{ab-c}$, & $q=\frac{f}{ab-c}$; par consequent $x=z-\frac{af}{ab-c}$, & $y=u+\frac{f}{ab-c}$. Donc, si l'on substitue ces valeurs dans l'equation proposée, on la reduira a l'equation homogene $(z+au)dz+(bz+cu)du=o$. Ensuite on separera les indeterminées dans cette equation par le Probleme I. en faisant $z=us$, & $dz=uds+sdu$; ce qui donnera, par substitution, & en divisant par u, l'equation $(s+a)uds+(ss+as+bs+c)du=o$, d'où l'on aura $\frac{du}{u}+\frac{(s+a)ds}{ss+as+bs+c}=o$ &, en intégrant, $L.u+S.\frac{(s+a)ds}{ss+as+bs+c}=C.$ constante.

Il faut remarquer que, si dans l'equation proposée on avoit $ab=c$, les constantes $p=-\frac{af}{ab-c}$, & $q=\frac{f}{ab-c}$ feroient infinies, & la methode dont nous nous sommes servis, ne feroit rien connoître. Mais, si dans ce cas on substitue ba au lieu de c dans l'equation, elle devient $(x+ay)dx+(bx+bay+f)dy=o$, ou $(x+ay)dx+(x+ay)bdy+fdy=o$; supposant maintenant $x+ay=t$, on aura $x=t-ay$, $dx=dt-ady$, $(x+ay)dx=tdt-atdy$, $(x+ay)bdy=btdy$, & l'equation entiere sera $tdt-atdy+btdy+$

$fdy = o$, ou $\frac{tdt}{bt - at + f} + dy = o$, equation dans laquelle les indeterminées font feparées.

CCCLXXVIII.

Si on vouloit intégrer l'equation homogene precedente $(z + au)dz + (bz + cu)du = o$ fans feparer les indeterminées, on trouvera aifément le facteur qui rendra cette différentielle complette. Il ne faudra pour cela qu'avoir recours au Corollaire I. du Probleme II. (Art. CCCLXXIV.), où nous avons demontré que le facteur dans les différentielles homogenes etoit generalement $\frac{1}{Ax + By + Cz \&c.}$, & par confequent dans le cas prefent, $= \frac{1}{Ax + By} = \frac{1}{z(z + au) + u(bz + cu)}$; & en fubftituant a la place de u, z, & de leurs différentielles, leurs valeurs refpectives, on retrouvera la même différentielle, dans laquelle nous avons determiné le facteur par une methode plus longue (Art. CCCXLIII.).

On pourroit trouver, fi on vouloit, d'autres facteurs (Art. CCCXLVIII.); & il ne faut pas ômettre que cela eft quelquefois neceffaire: par exemple, fi $Ax + By = o$, comme il arrive dans l'equation $ydx - xdy = o$. Le facteur $\frac{1}{Ax + By}$ feroit $\frac{1}{xy - xy}$; & par confequent il faudroit divifer la différentielle par $o.xy$, c'eft

a dire, par zero; mais puiſqu'on peut prendre un multiple quelconque de ce diviſeur (par l'endroit cité) on prendra $x^0 y^2$, & la différentielle complette ſera $\frac{ydx - xdy}{y^2}$, dont l'intégrale eſt $\frac{x}{y}$. Si on vouloit prendre le multiplicateur $\frac{1}{xy}$, on auroit alors $\frac{ydx - xdy}{xy} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$, dont l'intégrale eſt $L.x - L.y = L.\frac{x}{y}$.

CCCLXXIX.

Si dans la différentielle du Probleme precedent on ajoutoit un coefficient, qui ne fût point affecté de variables, pour lui donner cette autre forme $(g + ex + ay)dx + (bx + cy + f)dy = o$, en ſuppoſant de même que dans cette ſolution, $x = z + p$, & $y = u + q$. On auroit l'equation $(g + ep + aq + ez + au)dz + (f + bp + cq + bz + cu)du = o$, dans laquelle faiſant $g + ep + aq = o$, & $f + bp + cq = o$, on aura la transformée homogene $(ez + au)dz + (bz + cu)du = o$, dont le facteur $= \frac{1}{ezz + (a + b)zu + cuu}$. On pourra donc de même intégrer cette différentielle par la ſeparation des indeterminées, ou, ſans les ſeparer, en multipliant par le facteur; mais nous avons deja integré ailleurs cette différentielle.

CCCLXXX.

PROBLEME IV. Trouver les conditions que doivent avoir les expoſans des variables dans les equations différentielles de tant de termes qu'on voudra a deux variables ſeulement, pour qu'on puiſſe les rendre homogenes, & les intégrer enſuite par la ſeparation des indeterminées.

SOLUTION. 1.° Lorſque les equations n'ont que trois termes, on peut toujours les repreſenter par cette formule generale $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = o$, les expoſans des variables etant des nombres quelconques ou zero. Suppoſant d'abord que la ſomme des expoſans n'eſt pas la même dans chaque terme, puiſqu'alors l'equation feroit homogene, on fera $y = z^\pi$, z etant une nouvelle variable, & l'expoſant π une conſtante arbitrarie. On aura $dy = \pi z^{\pi - 1} dz$, $y^n = z^{\pi n}$, $y^q = z^{\pi q}$, $y^s = z^{\pi s}$, & par ſubſtitution $az^{\pi n} x^m dx + bz^{\pi q} x^p dx + c\pi x^r z^{\pi s + \pi - 1} dz = o$. Or pour rendre cette equation homogene, il faut que la ſomme des expoſans ſoit la même dans chaque terme. On aura donc ces deux egalités, $\pi n + m = \pi q + p = r + \pi s + \pi - 1$. On tire de la premiere $\pi = \frac{p - m}{n - q}$ & ſubſti-

tuant dans la feconde cette valeur au lieu de π, on trouve $(s-q+1)(p-m)=(p-r+1)(n-q)$, equation qui exprime la condition que doivent avoir les expofans de la propofée, pour qu'on puiffe la rendre homogene par la fubftitution de $z^{\frac{p-m}{n-q}}$ au lieu de y.

Neantmoins cette fubftitution eft impoffible, lorfque $p=m$, ou $n=q$; mais alors on pourra feparer tout d'un coup les indeterminées dans l'equation propofée; car fi $p=m$, elle devient $x^{m-r}dx+\frac{cy^s dy}{ay^n+by^q}=o$, & fi $n=q$, elle devient $ax^{m-r}dx+bx^{p-r}dx-cy^{s-n}dy=o$.

2.° Lorfque les equations font compofées de quatre termes, on peut toujours les reprefenter par cette formule generele $ay^n x^m dx+by^q x^p dx+cx^r y^s dy+fx^t y^\tau dy=o$. On fuppofera encore $y=z^\pi$, & on trouvera par fubftitution $az^{\pi n}x^m dx+bz^{\pi q}x^p dx+c\pi x^r z^{\pi s+\pi-1}dz+f\pi x^t z^{\pi\tau+\pi-1}dz=o$, on aura donc les trois equations fuivantes entre les fommes des expofans $\pi n+m=\pi q+p=r+\pi s+\pi-1=t+\pi\tau+\pi-1$. La premiere equation $\pi n+m=\pi q+p$ donne $\pi=\frac{p-m}{n-q}$; la feconde equation $\pi q+p=r+\pi s+\pi-1$, après avoir fubftitué la valeur de π,

qu'on vient de trouver, & avoir reduit le tout, donne $(p-r+1)(n-q)=(s-q+1)(p-m)$, pour la premiere condition des expoſans. La troiſieme equation $\pi q+p=t+\pi\tau+\pi-1$, après la ſubſtitution de la valeur de π & la reduction donne $(p-t+1)\times(n-q)=(\tau-q+1)(p-m)$ pour la ſeconde condition des expoſans; & s'ils ont ces deux conditions, l'equation de quatre termes propoſée deviendra homogene par la ſubſtitution de $z^{\frac{p-m}{n-q}}$ au lieu de y.

3.° On voit facilement qu'on trouvera de la même maniere, que les expoſans doivent avoir trois conditions pour les equations de cinq termes, quatre conditions pour les equations de ſix termes, & ainſi de ſuite. *C. Q. F. T.*

CCCLXXXI.

On peut ſe ſervir de ce Probleme pour examiner ſi les expoſans des deux variables dans une equation propoſée ont les conditions requiſés pour qu'on puiſſe rendre cette equation homogene, en ſuppoſant une de ſes variables y, ou x, egale a z^{π}, z etant une nouvelle variable avec ſon expoſant arbitraire π. On n'a pour cela qu'a comparer l'equation propoſée avec la formule generale qui luy convient, determiner les expoſans de la formule generale par ceux qui leur repon-

dent dans la propoſée, & ſubſtituer enſuite leurs valeurs dans les equations de condition, que fournit le Probleme. Si ces equations de condition ſe verifient, on pourra rendre l'equation propoſée homogene par la ſubſtitution de z^{π}, & on aura la valeur de l'expoſant π. Si on propoſoit, par exemple, l'equation de trois termes $4y^3 x^{\frac{1}{2}} dx + 3y^2 dx - bx^{\frac{1}{2}} dy = o$, on la compareroit avec la formule generale de trois termes $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = o$, & on trouveroit $n = 3, m = \frac{1}{2}, q = 2, p = o, r = \frac{1}{2}, s = o$; en ſubſtituant ces valeurs dans l'equation de condition $(s - q + 1)(p - m) = (p - r + 1)(n - q)$, on trouveroit l'egalité $(o - 2 + 1)(o - \frac{1}{2}) = (o - \frac{1}{2} + 1)(3 - 2)$, ou $-1 \times -\frac{1}{2} = +\frac{1}{2} \times 1$. On en conclûroit donc que l'equation propoſée peut être renduë homogene en ſuppoſant $y = z^{\pi}$, & $\pi = \frac{p - m}{n - q} = \frac{o - \frac{1}{2}}{3 - 2} = -\frac{1}{2}$; par conſequent $y = z^{-\frac{1}{2}}$. En effet, ſi on ſuppoſe $y = z^{-\frac{1}{2}}$, & qu'on ſubſtitue $z^{-\frac{3}{2}}$ pour y^3, z^{-1} pour y^2, & $-\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$ pour dy dans l'equation propoſée, elle

devient $4z^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx + 3z^{-1}dx + 3x^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{3}{2}}dz = o$, equation homogene.

CCCLXXXII.

PROBLEME V. Separer les indeterminées dans l'equation différentielle a deux variables $aXy^{n}dy + by^{n+1}X'dx + cy^{q}X''dx = o$, dans laquelle X, X', X'' ſont des fonctions quelconques de x & de conſtantes.

SOLUTION. 1.° En diviſant toute l'equation d'abord par y^{q}, & après par aX, on la reduit a l'equation $y^{n-q}dy + \frac{by^{n-q+1}X'dx}{aX} + \frac{cX''dx}{aX} = o$, dans laquelle on a le premier terme $y^{n-q}dy$ tout en y, & le dernier terme $\frac{cX''dx}{aX}$ tout en x.

2.° Donc, ſi on pouvoit trouver une fonction V de x & de conſtantes, telle qu'en multipliant toute l'equation ainſi reduite, elle rendît ſes deux premiers termes $Vy^{n-q}dy + \frac{Vby^{n-q+1}X'dx}{aX}$ une différentielle exacte, on trouveroit l'intégrale de toute l'equation en cherchant celle de la différentielle exacte par la methode du Chapitre I., & enſuite celle du dernier terme $\frac{cVX''dx}{aX}$ par les methodes de la premiere Partie, puiſ-

que

que ce dernier terme ne contiendroit qu'une seule variable x.

3.° Cela posé, si on suppose $\frac{by^{n-q+1}VX'}{aX}=A$, & $Vy^{n-q}=B$, & par conseqnent toute la différentielle exacte $=Adx+Bdy$, on aura (Art. CCCXXXII.) l'equation $\frac{(dA)}{dy}=\frac{(dB)}{dx}$; c'est a dire, qu'en prenant la différentielle de A en ne faisant varier que y, & en la divisant par dy, & ensuite la différentielle de B, en ne faisant varier que x, & divisant par dx, on aura l'equation $\frac{(n-q+1)bVX'y^{n-q}}{aX}=\frac{y^{n-q}dV}{dx}$; d'où l'on tire $\frac{(n-q+1)bX'dx}{aX}=\frac{dV}{V}$, & en intégrant de part & d'autre $L.V=S.\frac{(n-q+1)bX'dx}{aX}$. En prenant e pour le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; c'est a dire, en supposant $L.e=1$, on a $S.\frac{(n-q+1)bX'dx}{aX}=S.\frac{(n-q+1)bX'dx}{aX}.\ L.e=$ $L.e^{S.\frac{kbX'dx}{aX}}$, en mettant k pour $n-q+1$. On aura donc $L.V=L.e^{S.\frac{kbX'dx}{aX}}$, & en repassant des logarithmes aux nombres $V=e^{S.\frac{kbX'dx}{aX}}$. Donc puisque l'intégrale $S.\frac{kbX'dx}{aX}$ peut toujours se trouver par les me-

thodes de la premiere Partie, on connoîtra la valeur de la fonction V de x, qu'on cherchoit, & on pourra par consequent intégrer l'equation proposée.

4.° Si on met $e^{S.\frac{kbX'dx}{aX}}$ pour V dans l'equation $Vy^{n-q}dy+\frac{by^kVX'dx}{aX}+\frac{cVX''dx}{aX}=o$, la quantité $Vy^{n-q}dy+\frac{by^kVX'dx}{aX}$, ou $Bdy+Adx$ sera une différentielle exacte, dont l'intégrale peut se trouver par les methodes du Chapitre I., en intégrant le seul terme Bdy, ou $Vy^{n-q}dy$, dans la supposition de y seule variable, & de x constante. Or l'intégrale de ce terme dans cette supposition est $\frac{Vy^{n-q+1}}{n-q+1}=\frac{Vy^k}{k}$. Donc l'intégrale de toute l'equation sera $\frac{Vy^k}{k}+S.\frac{cVX''dx}{aX}=C$ constante, & en remettant $e^{S.\frac{kbX'dx}{aX}}$ pour V, on aura $\frac{y^k}{k}.e^{S.\frac{kbX'dx}{aX}}+S.\left(\frac{cX''dx}{aX}\times e^{S.\frac{kbX'dx}{aX}}\right)=C$; par consequent $y^k=\frac{kC-S.\left(\frac{kcX''dx}{aX}.e^{S.\frac{kbX'dx}{aX}}\right)}{e^{S.\frac{kbX'dx}{aX}}}=$ $kC.e^{S.-\frac{kbX'dx}{aX}}-S.\left(\frac{kcX''dx}{aX}.e^{S.\frac{kbX'dx}{aX}}\right)\times e^{S.-\frac{kbX'dx}{aX}}$,

& $y = \left[k C . e^{S. - \frac{k b X' d x}{a X}} - S. \left(\frac{k c X'' d x}{a X} . e^{S. \frac{k b X' d x}{a X}} \right) \times \right.$

$\left. e^{S. - \frac{k b X' d x}{a X}} \right]^{\frac{1}{k}}$; les indeterminées feront donc toujours feparées, & l'equation intégrée par cette methode. *C. Q. F. T.*

Si k, ou $n - q + 1$ etoit zero, les quantités qui font divifées par k deviendroient infinies, & la methode paroîtroit ne rien donner; mais dans ce cas on auroit $n - q = -1$, & l'equation propofée fe reduiroit a celle-cy $\frac{dy}{y} + \frac{b X' d x}{a X} + \frac{c X'' d x}{a X} = o$, dont l'intégrale eft $L. y + \frac{b}{a} S. \frac{X' d x}{X} + \frac{c}{a} S. \frac{X'' d x}{X} = C$ conftante.

CCCLXXXIII.

COROLLAIRE I. Si dans l'equation propofée on fuppofe $X' = x^n$, & $X = x^{n+1}$, on aura $\frac{(n-q+1) b X' d x}{a X}$ $= \frac{(n-q+1) b d x}{a x} = \frac{dV}{V}$ (par la Solution precedente N.° 3.), & en intégrant de part & d'autre $\frac{(n-q+1) b}{a} \times$ $L. x = L. V$, ou $b L. x = L. V$, en ecrivant b pour $\frac{(n-q+1) b}{a}$; par confequent $L. x^b = L. V$, & $x^b = V$. Donc en fubftituant x^b pour V, & x^{n+1} pour X dans

l'integrale $\frac{Vy^k}{k} + S.\frac{cVX''dx}{aX} = C$, cette intégrale devien-

dra $\frac{x^b y^k}{k} + S.\frac{c}{a}X''x^{b-n-1}dx = C$, ou $y^k =$

$\frac{Ck - \frac{ck}{a}S.X''x^{b-n-1}dx}{x^b}$.

CCCLXXXIV.

Corollaire II. Si l'equation propofée etoit $ax^m y^n dy + by^{n+1}x^p dx - dx = o$; en la comparant avec celle du Probleme $aXy^n dy + by^{n+1}X'dx + cy^q X''dx = o$, on trouveroit $X = x^m$, $X' = x^p$, $+ cy^q X''$ $= -1$; par confequent $y^q = y^o = 1$, $X'' = x^o = 1$, & $c = -1$, & $\frac{(n-q+1)bX'dx}{aX} = \frac{(n+1)bx^{p-m}dx}{a}$;

$S.\frac{(n-q+1)bX'dx}{aX} = \frac{(n+1)bx^{p-m+1}}{(p-m+1)a}$; $V =$

$e^{\frac{(n+1)bx^{p-m+1}}{(p-m+1)a}}$, & l'intégrale de toute l'equation

$\frac{Vy^k}{k} + S.\frac{cVX''dx}{aX} = C$ deviendroit $\frac{y^k}{k}e^{\frac{(n+1)bx^{p-m+1}}{(p-m+1)a}}$

$+ S.\left(-\frac{1}{a}x^{-m}dx \times e^{\frac{(n+1)bx^{p-m+1}}{(p-m+1)a}}\right) = C.$

CCCLXXXV.

LEMME I. Toutes les equations différentielles a deux variables & a trois termes peuvent ſe reduire a cette forme $dy = ax^m dx + by^q dx$.

DEMONSTRATION. Puiſque ces equations ont neceſſairement deux termes, où ſe trouve la différence d'une même variable, & un troiſieme terme, où eſt la différence de l'autre variable, il eſt evident qu'elles peuvent toujours être compriſes ſous cette forme generale $A z^\alpha u^\beta du = B u^\gamma z^\delta dz + C u^\lambda z^\mu dz$, dans laquelle A, B, C deſignent des conſtantes quelconques, & les expoſans $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ des nombres quelconques ou zero. Or diviſant toute cette equation par $A z^\alpha u^\gamma$, on la reduit a celle-cy $u^{\beta - \gamma} du = \frac{B}{A} z^{\delta - \alpha} dz + \frac{C}{A} u^{\lambda - \gamma} \times z^{\mu - \alpha} dz$, qu'on peut exprimer ainſi $u^\pi du = E z^\tau dz + F u^\rho z^\sigma dz$; & ſi on fait $u^{\pi + 1} = y$, ou $u = y^{\frac{1}{\pi + 1}}$, on en tirera $u^\pi du = \frac{dy}{\pi + 1}$, $u^\rho = y^{\frac{\rho}{\pi + 1}}$, & par ſubſtitution $dy = (\pi + 1) E z^\tau dz + (\pi + 1) F y^{\frac{\rho}{\pi + 1}} z^\sigma dz$, qu'on peut exprimer ainſi $dy = G z^\tau dz + H y^q z^\sigma dz$. De même, ſi on fait $z^{\sigma + 1} = x$, ou $z = x^{\frac{1}{\sigma + 1}}$, on en

tirera $z^{\sigma}\,dz = \frac{dx}{\sigma+1}$, $z^{\tau} = x^{\frac{\tau}{\sigma+1}}$, $dz = \frac{1}{\sigma+1}x^{\frac{1}{\sigma+1}-1}\,dx$, $z^{\tau}\,dz = \frac{1}{\sigma+1}x^{\frac{\tau-\sigma}{\sigma+1}}\,dx$, & par substitution $dy = \frac{G}{\sigma+1} \times x^{\frac{\tau-\sigma}{\sigma+1}}dx + \frac{H}{\sigma+1}y^{q}\,dx$, ou $dy = ax^{m}\,dx + by^{q}\,dx$, en mettant a pour $\frac{G}{\sigma+1}$, b pour $\frac{H}{\sigma+1}$, & m pour $\frac{\tau-\sigma}{\sigma+1}$. *C. Q. F. D.*

CCCLXXXVI.

PROBLEME VI. Une equation différentielle quelconque a deux variables, & a trois termes etant donnée, separer les indeterminées pour l'intégrer ensuite, ou l'intégrer en les separant.

SOLUTION. Nous venons de demontrer que l'equation proposée peut toujours se reduire a cette forme $dy = ax^{m}\,dx + by^{q}\,dx$, qu'on pourra resoudre comme il suit.

1.° Si $m = o$, ou si l'equation est $dy = a\,dx + by^{q}\,dx$, on aura $\frac{dy}{a+by^{q}} = dx$, dans laquelle les variables sont separées.

2.° Si $q = \frac{m}{m+1}$, ou si l'equation est $dy = ax^{m}\,dx + by^{\frac{m}{m+1}}\,dx$, on la rendra homogene en faisant $x =$

$z^{\frac{1}{m+1}}$, & on ſeparera enſuite les indeterminées (Art. CCCLXXII.). Car, ſi on ſuppoſe $x = z^{\frac{1}{m+1}}$, on aura $x^m = z^{\frac{m}{m+1}}$, $dx = \frac{1}{m+1} z^{-\frac{m}{m+1}} dz$, $x^m dx = \frac{1}{m+1} dz$, & l'equation deviendra $dy = \frac{a\,dz}{m+1} + \frac{b}{m+1} y^{\frac{m}{m+1}} \times z^{-\frac{m}{m+1}} dz$, ou $(m+1) z^{\frac{m}{m+1}} dy = a z^{\frac{m}{m+1}} dz + b y^{\frac{m}{m+1}} dz$, qui eſt homogene.

3.° Si $q = 1$, ou ſi l'èquation propoſée eſt $dy = a x^m dx + b y dx$, on pourra la mettre ſous cette forme $-y^0 dy + f x^m y^0 dx + g y^1 dx = o$, & la comparer avec la formule du Probleme precedent $a X y^n dy + c y^q X' dx + b y^{n+1} X' dx = o$, ce qui donnera $a = -1$, $n = o$, $X = x^0 = 1$, $c = f$, $q = o$, $X' = x^m$, $b = g$, $X' = x^0 = 1$, & en ſubſtituant ces valeurs dans l'intégrale de ce Probleme, on aura celle de l'equation propoſée $dy = f x^m + g y dx$.

4.° Enfin on peut toujours intégrer l'equation propoſée, en ſeparant en même tems les indeterminées, par la methode de Newton, que nous avons expliquée

dans le Chapitre precedent, quelques soient les nombres donnés m & q. On peut même trouver une infinité de suites, qui exprimeront la valeur de y en x, en laissant l'exposant m indeterminé, & prenant un nombre quelconque, comme 1, 2, 3, &c., $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. pour l'exposant q, & même en laissant aussi cet exposant indeterminé, & en formant par les formules de Newton les puissances q des suites qui expriment les valeurs de y en x. Car puisque $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + S.by^q dx$, on aura, en ajoutant une constante arbitraire C, $y = C + \frac{ax^{m+1}}{m+1} + S.by^q dx$; ce qui peut fournir une infinité de suites différentes pour la valeur de y en x, & en constantes, comme nous l'avons fait voir. Nous allons donner quelques exemples de cette methode, en laissant l'exposant m indeterminé.

CCCLXXXVII.

EXEMPLE I. Soit proposée l'equation $dy = ax^m dx + by dx$; en intégrant de côté & d'autre, on aura $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + S.bydx$, & en prenant $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$ pour le premier terme de la suite, qui doit exprimer la valeur de y en x & en constantes, & X pour la somme des autres termes

mes de cette même ſuite, de ſorte que $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + X$, on aura $by\,dx = \frac{bax^{m+1}}{m+1}dx + bX\,dx$; $S.by\,dx = \frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + S.bX\,dx$, & $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + S.bX\,dx$: de même ſi on ſuppoſe que X' ſoit la ſomme de tous les termes de la ſuite X après le premier de cette ſuite $\frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$, de ſorte qu'on ait $X = \frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + X'$; on aura auſſi $bX\,dx = \frac{bbax^{m+2}dx}{(m+1)(m+2)} + bX'dx$; $S.bX\,dx = \frac{b^2ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + S.bX'dx$, & $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{b^2ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + S.bX'dx$. En ſuppoſant de même $X' = \frac{b^2ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + X''$, on trouvera $S.bX'dx = \frac{b^3ax^{m+4}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} + S.bX''dx$, & $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{b^2ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{b^3ax^{m+4}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} + S.bX'dx$, & ainſi de ſuite a l'infini.

Il eſt donc evident que la methode de Newton a lieu dans les equations différentielles avec des expoſans indeterminés, & qu'on peut ſe ſervir de ſes Tables, ou rectangles de la même maniere qu'on s'en ſert, lorſque les expoſans ſont tous donnés en nombres comme nous allons le faire voir en cherchant la ſuite qui exprime la valeur de y en x, dans la ſuppoſition que le premier terme de cette ſuite ſoit une conſtante arbitraire C, qu'on ajoute a l'intégrale, de ſorte qu'on ait $y = C + \frac{ax^{m+1}}{m+1} + S.bydx$. Car en ſuppoſant $y = C + \frac{ax^{m+1}}{m+1} + X$, on aura $bydx = bCdx + \frac{bax^{m+1}dx}{m+1} + bXdx$, en intégrant de part & d'autre, $S.bydx = bCx + \frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + S.bXdx$, & $y = C + \frac{ax^{m+1}}{m+1} + bCx + \frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + S.bXdx$. En continuant l'operation, comme dans la Table (*Planche VI. Fig.* 12.) on trouvera

$$y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{b^2ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{b^3ax^{m+4}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} \&c.$$
$$+ C + bCx + \frac{b^2Cx^2}{2} + \frac{b^3Cx^3}{6} \&c.$$

On voit bien que, ſi l'expoſant m etoit un nombre entier negatif quelconque, il y auroit toujours des

termes dans la valeur de y, qui auroient zero pour denominateur, & qui feroient par confequent infinis, puifque ces denominateurs font compofés de facteurs $m+1$, $m+2$, $m+3$, &c. Il faudra donc alors fe fervir des préparations que Newton prèfcrit, en fubftituant au lieu de x la même variable, ou une autre avec une conftante arbitraire; ou bien il faudra intégrer par les logarithmes: par exemple, fi on fuppofe $m = -1$, l'intégrale de $ax^m dx$, ou de $\frac{adx}{x}$ prife par les logarithmes fera $aL.x$, & on aura $y = aL.x + S.bydx = aL.x + S.(baL.x \times dx + bXdx) = aL.x + baxL.x - bax + S.bXdx$, & on pourra continuer en intégrant toujours par les logarithmes fuivant cette regle connuë, que l'intégrale de la différentielle logarithmique $cx^n L.x \times dx$ eft $\frac{cx^{n+1}}{n+1} L.x - \frac{cx^n}{n+1}$. On pourroit pouffer ces remarques beaucoup plus loin, & elles meritent d'exercer la fagacité des jeunes Geometres.

CCCLXXXVIII.

Exemple II. Soit propofée l'equation, qu'on appelle communément *du Comte Riccati*, $dy = ax^m dx + by^2 dx$. On peut la refoudre, comme dans l'Exemple

precedent, sans se servir des Tables ou rectangles de Newton. Car en intégrant de part & d'autre, on aura d'abord $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + S.\,by^2dx$; supposant ensuite, que la serie qui doit exprimer la valeur de y en x soit $= \frac{ax^{m+1}}{m+1} + X$, on aura $y^2 = \frac{a^2x^{2m+2}}{(m+1)^2} + \frac{2ax^{m+1}X}{m+1} + XX$, & la différentielle $byydx = \frac{ba^2x^{2m+2}dx}{(m+1)^2} + \frac{2bax^{m+1}Xdx}{m+1} + bXXdx$, &, en prenant les intégrales de côté & d'autre, on trouvera $S.\,byydx = \frac{ba^2x^{2m+3}}{(m+1)^2(2m+3)} + S.\,\frac{2bax^{m+1}Xdx}{m+1} + S.\,bXXdx$; par consequent $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{ba^2x^{2m+3}}{(m+1)^2(2m+3)} + S.\,\frac{2bax^{m+1}Xdx}{m+1} + S.\,bXXdx$: supposant encore $X = \frac{ba^2x^{2m+3}}{(m+1)^2(2m+3)} + X'$; & substituant cette valeur de X dans les différentielles $\frac{2bax^{m+1}Xdx}{m+1}$, & $bXXdx$, on trouvera, en prenant les intégrales, d'autres termes de la suite qui doit exprimer la valeur de y en x; mais le calcul sera plus court, si on le fait par la methode de Newton, comme on le voit dans la Table (*Planche VII. Fig.* 13.).

CCCLXXXIX.

La methode, dont nous nous ſommes ſervis pour reſoudre les deux equations precedentes par les Tables, ou rectangles de Newton, fournit generalement la ſeparation & l'intégration en même tems, lorſqu'elles ſont poſſibles; il ne faut cependant pas ômettre la methode particuliere, qu'on a coûtume d'employer, pour traiter l'equation du dernier exemple, $dy + ay^2dx = bx^m dx$. On peut determiner une infinité de valeurs de m, dans leſquelles cette equation feroit ſeparable; on obſerve pour cela que les variables peuvent être ſeparées, ſi on change l'equation propoſée en une autre, ou ay^2 & b ſoient multipliés par une même puiſſance de x. Cette transformation ſe fait par le moyen des coefficiens, & des expoſans indeterminés, & en introduiſant une nouvelle inconnuë. Suppoſons $y = Ax^p + x^q t$, on aura, en différentiant, $dy = pAx^{p-1}dx + qx^{q-1}tdx + x^q dt$, & ſubſtituant a la place de dy & y^2 leurs valeurs reſpectives, l'equation precedente deviendra $pAx^{p-1}dx + qx^{q-1}tdx + x^q dt + ax^{2q} \times ttdx + aAAx^{2p}dx + 2aAx^{p+q}tdx = bx^m dx$.

Maintenant pour satisfaire a la condition requisé, supposons $p-1=2p$, $pA+aAA=o$, $p+q=q-1$, $q+2aA=o$, d'où l'on tire $p=-1$, $A=\frac{1}{a}$, $q=-2$, & on a la transformée $x^{-2}dt+ax^{-4}\times ttdx=bx^{m}dx$. Or, puisque l'on veut que ay^2 & b soient multipliés par une même puissance de x, on voit que $m=-4$, & que dans ce cas l'equation est separable.

Soit fait de plus $t=\frac{1}{z}$, l'equation precedente deviendra $dz+bx^{m+2}z^2dx=ax^{-2}dx$, & supposant $z=A'x^{p'}+x^{q'}t'$, on aura en operant comme dans la substitution precedente $p'A'x^{p'-1}dx+q'x^{q'-1}t'dx+x^{q'}dt'+bx^{2q'+m+2}t't'dx+bA'^2x^{2p'+m+2}dx+2b\times A'x^{p'+q'+m+2}t'dx=ax^{-2}dx$. Soit fait, comme cy-devant, $2p'+m+2=p'-1$, $pA'+bA'^2=o$, $q'+2bA'=o$, $q'-1=p'+q'+m+2$; on aura $p=-m-3$, $A'=\frac{m+3}{b}$, $q'=-2m-6$, & la seconde transformée sera $x^{-2m-6}dt'+bx^{-3m-10}t't'dx=ax^{-2}dx$, ou $dt'+bx^{-m-4}t't'dx=ax^{2m+4}dx$; & puisque

$-m-4$ doit être $=2m+4$, il s'enſuit que $m=-\frac{8}{3}$, autre cas de ſeparabilité. En faiſant de nouveau $t'=\frac{1}{z}$, & $z'=A''x^{p''}+x^{q''}t''$, & continuant ſucceſſivement les mêmes operations, on trouvera que l'equation eſt ſeparable ſi $m=-\frac{12}{5}$, $m=-\frac{16}{7}$, $m=-\frac{20}{9}$, &c., & generalement ſi r eſt un nombre entier poſitif quelconque 1, 2, 3, &c., l'equation ſera ſeparable dans tous les cas de $m=-\frac{4r}{2r-1}$; ainſi en ſuppoſant $r=1$, on aura $m=-4$; ſi $r=2$, on aura $m=-\frac{8}{3}$, &c. De plus ſi on conſidere la loi des expoſans, on verra que dans la premiere ſubſtitution $y=Ax^{p}+x^{q}t$, on a $p=-1$, $q=-2$; dans la ſeconde ſubſtitution $z=A'x^{p'}+x^{q'}t'$ on a $p'=-m-3$, $q'=-2m-6$, & ainſi de ſuite, on voit que le ſecond expoſant eſt toujours le double du premier, en ſorte que l'expoſant p etant $-rm-2r-1$, l'expoſant q ſera $-2rm-4r-2$, d'où il ſera aiſé en reprenant les ſubſtitutions precedentes de former l'expreſſion generale de $y=$

$$Ax^{-1} + x^{-2} \cdot \frac{1}{A'x^{-m-3} + x^{-2m-6}} \cdot \frac{1}{A''x^{-2m-5} + x^{-4m-10}} \cdot \&c. \times t,$$

t etant une variable qu'on determine par la fubftitution dans les equations feparées.

Si au lieu de fubftituer $y = Ax^p + x^q t$, comme on a fait d'abord dans l'equation $dy + ay^2 dx = bx^m dx$, on eût fuppofé premierement $y = \frac{1}{z}$ & enfuite $z = Ax^p + x^q t$, on trouveroit, en fuivant les mêmes operations, une infinité d'autres valeurs de m, qui rendroient l'equation feparable. On fepareroit avec la même facilité les variables dans l'equation $x^q dy + ay^2 x^n dx = bx^m dx$. Il ne faut pour cela que divifer par x^q, & faire $x^{n-q+1} = z$.

Enfin on peut appliquer cette methode aux equations qui renferment différentes puiffances de dx & dy. Car il eft neceffaire que ces fortes d'equations foient homogenes par rapport aux dimenfions de dx & dy. C'eft pourquoy on pourra divifer l'equation par une dimenfion de dx, qui foit egale a la fomme des dimenfions de dx & dy, & on refoudra l'equation en regardant $\frac{dy}{dx}$ comme l'inconnuë. D'où il eft evident qu'on pourra traiter ces equations, comme fi elles ne contenoient

noient dx & dy qu'au premier degré. Nous ne nous arrêterons pas davantage a l'explication de cette methode, laquelle, quoiqu'elle renferme une infinité de cas, en laiſſe cependant une infinité d'autres, au lieu que la methode tirée des rectangles de Newton fournit une Solution generale, & donne la ſeparation & l'intégration par la même operation.

CCCXC.

LEMME II. Toutes les equations différentielles du premier ordre a deux variables, & a quatre termes, peuvent ſe reduire a l'une ou l'autre de ces deux formules.

I. $ax^m dx + by^p x^n dx + cy^s dx - dy = o.$

II. $ax^m dx + by^p dx + cy^s x^r dy - dy = o$, ou $adx + by^p x^r dx + cy^s x^n dy - dy = o.$

DEMONSTRATION. Dans toutes les equations de cette ſorte la différence d'une des deux variables ſe trouve dans un ſeul terme, ou dans deux termes, ou dans trois; car elle ne peut pas être dans tous les quatre termes, par ce qu'alors toute l'equation pourroit être diviſée par cette différence, & deviendroit finie. Il n'y a donc que deux cas: le premier quand la différence d'une des deux variables ſe trouve dans un ſeul terme de l'equation, & par conſequent la différence de

l'autre variable dans le trois autres termes; le ſecond cas, quand les deux différences ſe trouvent chacune dans deux termes.

Suppoſé que les deux variables ſoient z & u, on peut repreſenter generalement le premier cas par l'equation $Az^{\alpha}u^{\beta}du + Bu^{\gamma}z^{\delta}dz + Cu^{\lambda}z^{\mu}dz + Du^{\nu}z^{\rho}dz = o$, en prenant A, B, C, D pour des quantités quelconques, & α, β, γ, &c. pour des nombres auſſi quelconques, ou zero. Or cette equation etant diviſée par $Az^{\alpha}u^{\gamma}$ ſe reduit a la forme $u^{\beta-\gamma}du + Ez^{\delta-\alpha}dz + Fu^{\lambda-\gamma}z^{\mu-\alpha}dz + Gu^{\nu-\gamma}z^{\rho-\alpha}dz = o$, & celle-cy en faiſant $u^{\beta-\gamma+1} = y$, ou $u^{\beta-\gamma}du = \frac{dy}{\beta-\gamma+1}$, & $u = y^{\frac{1}{\beta-\gamma+1}}$, ſe reduit comme dans le Lemme precedent a la forme $dy + Hz^{\delta-\alpha}dz + Ky^{\pi}z^{\mu-\alpha}dz + Ly^{\tau} \times z^{\rho-\alpha}dz = o$; & cette equation, en faiſant de plus $z^{\rho-\alpha+1} = x$, ou $z^{\rho-\alpha}dz = \frac{dx}{\rho-\alpha+1}$, & $z = x^{\frac{1}{\rho-\alpha+1}}$ devient $dy + Mx^{m}dx + Ny^{\pi}z^{n}dx + Py^{\tau}dx = o$, ou enfin, en prenant a, b, c pour des quantités quelconques, & m, p, n, s pour des nombres quelconques ou zero, $ax^{m}dx + by^{p}x^{n}dx + cy^{s}dx - dy = o$.

On peut de même repreſenter generalement le ſecond cas par l'equation $Az^{\alpha}u^{\beta}du + Bz^{\delta}u^{\gamma}du + Cu^{\lambda} \times$

$z^{\mu} dz + D u^{\nu} z^{\rho} dz = o$, laquelle, etant divisée par $A z^{\alpha} u^{\lambda}$, devient $u^{\beta - \lambda} du + E z^{\delta - \alpha} u^{\gamma - \lambda} du + F z^{\mu - \alpha} dz + G u^{\nu - \lambda} z^{\rho - \alpha} dz = o$, & celle-cy en faisant $u^{\beta - \lambda + 1} = y$, ou $u^{\beta - \lambda} du = \frac{dy}{\beta - \lambda + 1}$, & $u = y^{\frac{1}{\beta - \lambda + 1}}$, devient $dy + H z^{\delta - \alpha} y^{\pi} dy + K z^{\mu - \alpha} dz + L y^{\tau} z^{\rho - \alpha} dz = o$.
Or cette equation, en supposant $z^{\rho - \alpha + 1} = x$, se reduit a cette forme $a x^{m} dx + b y^{p} dx + c y^{s} x^{n} dy - dy = o$; & si, au lieu de supposer $z^{\rho - \alpha + 1} = x$, on avoit fait $z^{\mu - \alpha + 1} = x$, on auroit eû la troisieme forme $a dx + b y^{p} x^{1} dx + c y^{s} x^{n} dy - dy = o$.

CCCXCI.

PROBLEME VII. Une equation différentielle quelconque du premier ordre a deux variables & a quatre termes etant donnée, en separer les indeterminées avant de l'intégrer, ou en l'integrant.

SOLUTION. Cas I. Lorsque l'equation proposée est $a x^{m} dx + b y^{p} x^{n} dx + c y^{s} dx - dy = o$.

1.° Si dans cette equation $p = \frac{m - n}{m + 1}$, & $s = \frac{m}{m + 1}$,

on la rendra homogene en faifant $x = z^{\frac{1}{m+1}}$. Car on aura $dx = \frac{1}{m+1} z^{\frac{-m}{m+1}} dz$, $x^m = z^{\frac{m}{m+1}}$, $x^m dx = \frac{1}{m+1} dz$; $x^n = z^{\frac{n}{m+1}}$, $x^n dx = \frac{1}{m+1} z^{\frac{n-m}{m+1}} dz$. Subftituant ces valeurs dans l'equation propofée, elle devient $\frac{adz}{m+1} + \frac{by}{m+1} y^{\frac{m-n}{m+1}} z^{\frac{n-m}{m+1}} dz + \frac{c}{m+1} y^{\frac{m}{m+1}} z^{\frac{-m}{m+1}} dz - dy = o$, equation homogene, dont on pourra feparer les indeterminées, & enfuite intégrer (Art. CCCLXXII.).

2.° Si dans l'equation propofée on fait $y = x^{\delta} u$; δ etant un expofant indeterminé, & u une nouvelle variable, on aura $y^p = x^{\delta p} u^p$, $y^s = x^{\delta s} u^s$, $dy = \delta u x^{\delta - 1} dx + x^{\delta} du$, & par fubftitution la propofée deviendra $a x^m dx + b u^p x^{\delta p + n} dx + c u^s x^{\delta s} dx - \delta u x^{\delta - 1} dx - x^{\delta} du = o$, equation de cinq termes, qu'on peut reduire a trois, en fuppofant que deux des cinq fe detruifent par la determination de l'expofant arbitraire δ. Après avoir tenté différentes fuppofitions de deux termes egalés a zero, on trouve que la feule qu'on puiffe faire fans abfurdité eft $b u^p x^{\delta p + n} dx - \delta u x^{\delta - 1} dx = o$; d'où l'on tire $p = 1$, $\delta p + n = \delta +$

$n = \delta - 1$, ou $n = -1$, & $b = \delta$; ce qui reduit l'equation propoſée a celle-cy $ax^m dx + byx^{-1} dx + cy^s dx - dy = o$, qu'on ramene a l'equation de trois termes $ax^m dx + cu^s x^{bs} dx - x^b du = o$, ou $ax^{m-b} dx + cu^s x^{bs-b} dx - du = o$, en faiſant $y = x^b u$.

Si dans cette equation de trois termes $m = bs$, on aura $ax^{m-b} dx + cu^s x^{m-b} dx = du$, & $x^{m-b} dx = \frac{du}{a + cu^s}$, equation dans laquelle les indeterminées ſont ſeparées.

Si dans la même equation $s = 1$, on aura $ax^{m-b} dx + cu dx - du = o$, ou $u^o du - cu^1 dx - ax^{m-b} dx = o$, qu'on pourra reduire par le Probleme (Art. CCCLXXXII.). Si on avoit $s = 2$, l'equation auroit la forme de celle de Riccati, dont nous venons de parler. Enfin ſi on avoit $s = \frac{m}{m+1}$, ou ſi l'equation etoit $ax^{m-b} dx + cu^{\frac{m}{m+1}} x^{\frac{-b}{m+1}} dx - du = o$, on pourroit toujours la rendre homogene, & par conſequent en ſeparer les indeterminées. Car en faiſant $x^{\frac{-b}{m+1}+1}$, ou $x^{\frac{m+1-b}{m+1}} = z$, on aura $x^{\frac{-b}{m+1}} dx =$

$\frac{m+1}{m+1-b} dz$, $x = z^{\frac{m+1}{m+1-b}} dx = \frac{m+1}{m+1-b} z^{\frac{b}{m+1-b}} dz$, & $x^{m-b} = \frac{m+1}{m+1-b} z^m dz$, & l'equation, après la ſubſtitution, ſeroit $\frac{m+1}{m+1-b} a z^m dz + \frac{m+1}{m+1-b} \times c u^{\frac{m}{m+1}} dz - du = o$, qu'on rendroit homogene en ſuppoſant $z = V^{\frac{m}{m+1}}$, puiſqu'on auroit $z^m = V^{\frac{m}{m+1}}$, $dz = \frac{1}{m+1} V^{\frac{-m}{m+1}} dV$, $z^m dz = \frac{1}{m+1} dV$, & $u^{\frac{m}{m+1}} dz = \frac{1}{m+1} u^{\frac{m}{m+1}} V^{\frac{-m}{m+1}} dV$.

3.° Enfin, en mettant l'equation propoſée ſous cette forme $\frac{dy}{dx} = ax^m + by^p x^n + cy^s$, on la pourra toujours intégrer en ſeparant en même tems les indeterminées par la methode de Newton, quelques nombres donnés que ſoient les expoſans p & s, quand bien même les expoſans m, & n demeureroient indeterminés. On n'aura pour cela, qu'à plaçer le terme ax^m dans le rectangle horiſontal au haut de la table, & les deux autres termes $+by^p x^n$ & $+cy^s$ dans le rectangle vertical vers la gauche, & operer enſuite ſuivant les regles de la methode, comme dans le Probleme

precedent. On peut en faire un essai sur l'equation $dy = ax^m dx + byx^n dx + cy^2 dx$, sur laquelle on a beaucoup travaillé, apparemment a cause de sa ressemblance avec celle de Riccati. Cette equation n'est qu'un cas particulier de celles que nous traitons dans ce Probleme.

CAS II. Lorsque l'equation proposée est $ax^m dx + by^p dx + cy^s x^r dy - dy = o$.

1.° Si dans cette equation on a $p = \frac{m}{m+1}$, & $s = -\frac{r}{m+1}$, on la rendra homogene en faisant $x = z^{\frac{1}{m+1}}$, car on aura $x^m = z^{\frac{m}{m+1}}$, $dx = \frac{1}{m+1} z^{\frac{-m}{m+1}} dz$, $x^m dx = \frac{1}{m+1} dz$; $y^p = y^{\frac{m}{m+1}}$; $y^p dx = \frac{1}{m+1} y^{\frac{m}{m+1}} \times z^{\frac{-m}{m+1}} dz$; $y^s = y^{\frac{-r}{m+1}}$; $x^r = z^{\frac{r}{m+1}}$; $y^s x^r dy = y^{\frac{-r}{m+1}} \times z^{\frac{r}{m+1}} dy$, & toute l'equation après la substitution sera $\frac{1}{m+1} a dz + \frac{1}{m+1} by^{\frac{m}{m+1}} z^{\frac{-m}{m+1}} dz + cy^{\frac{-r}{m+1}} z^{\frac{r}{m+1}} dy - dy = o$.

2.° Si on prend pour le second cas l'autre equation generale $adx + by^p x^r dx + cy^s x^n dy - dy = o$, &

que dans cette equation on ait $c = -b$, $s = p - 1$, & $n = r + 1$, enforte que la propofée foit $adx + by^p x^r \times dx - by^{p-1} x^{r+1} dy - dy = o$. On pourra toujours l'intégrer par le Probleme (ART. CCCLXXXII.) en faifant $y = ux$. Car on aura par cette fuppofition $y^p = u^p x^p$; $y^{p-1} = u^{p-1} x^{p-1}$; $dy = udx + xdu$; & après les fubftitutions, la propofée fera $adx + bu^p x^{p+1} dx - bu^{p-1} x^{p+r} (udx + xdu) - udx - xdu = o$ ou $\times (a-u) dx - xdu - bu^{p-1} x^{p+r+1} du = o$, qui a la forme requifé dans le Probleme cité (Art. CCCLXXXII.) comme on le voit evidemment en ecrivant y pour x, & x pour u dans cette derniere equation, qui fe change par là en $(a-x) y^o dy - y^1 x^o dx - bx^{p-1} \times y^{p+r+1} dx = o$.

3.° Enfin puifque dans le fecond cas on a $\frac{dy}{dx} = \frac{ax^m + by^p}{1 - cy^s x^r}$, ou encore $\frac{dy}{dx} = \frac{a + by^p x^r}{1 - cy^s x^n}$, on pourra toujours refoudre ces cas par la Methode de Newton, en reduifant l'une ou l'autre de ces fractions en feries, ce qu'on peut toujours faire par la divifion continuée a l'infini.

CCCXCII.

CCCXCII.

REMARQUE. Il faut bien obſerver qu'on ne doit pas confondre la ſeparation des variables avec l'intégration des equations différentielles; c'eſt a dire, qu'on ne doit pas regarder une equation, comme n'etant pas intégrable, par ce que les indeterminées ne ſont point ſeparables. C'eſt une attention que pluſieurs Geometres paroiſſent n'avoir pas faite. Ainſi, par exemple, dans la celebre equation de Riccati, lorſqu'on ne peut parvenir a ſeparer les variables, on a coûtume d'abandonner ces cas, & on deſeſpere de leur intégration. Or nous avons fait voir generalement par la Methode de Newton, comment on pouvoit intégrer cette equation; & la ſeparation des indeterminées eſt renfermée dans l'intégration même.

Il nous reſte a obſerver que les equations que nous avons traitées dans ce Chapitre peuvent quelques fois ſe ramener plus aiſément aux methodes du Chapitre premier, en cherchant les facteurs qui peuvent rendre ſes equations intégrables. Soit, par exemple, l'equation de quatre termes $dy + pydx + qyydx + rdx = o$, dans laquelle p, q, r ſont des fonctions de x ſeulement. Il faut ſuppoſer premierement que u, fonction de x, eſt une des valeurs particulieres de y, qui ſatisfait a l'equation propoſée, c'eſt a dire, qui la rend

egale a zero par la substitution, ensorte qu'on ait $du + pudx + qu^2dx + rdx = o$. Donc, si on fait de plus $y = u + \frac{1}{z}$, on aura en différentiant & en substituant, $du - \frac{dz}{zz} + pudx + \frac{pdx}{z} + qu^2dx + \frac{2qudx}{z} + \frac{qdx}{zz} + rdx = o$; & par consequent, en ôtant la seconde equation de la premiere, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} du - \frac{dz}{zz} + pudx + \frac{pdx}{z} + qu^2dx + \frac{2qudx}{z} + \frac{qdx}{zz} + rdx \\ -du \quad -pudx \quad -qu^2dx \quad -rdx \end{array}\right\} = o.$$

Donc $-\frac{dz}{zz} + \frac{pdx}{z} + \frac{2qudx}{z} + \frac{qdx}{zz} = o$, ou $\frac{dz - (p + 2qu)zdx - qdx}{zz} = o$, ou $dz - (p + 2qu) \times zdx - qdx = o$. Or, en comparant cette derniere equation avec l'expression (Art. CCCXLV.), dans laquelle y repond icy a z, on trouve $r = 1$, $q = -(p + 2qu)$. Donc le facteur M, qui dans l'endroit cité est $\frac{1}{r} e^{S.\frac{qdx}{r}}$, sera icy $e^{S.-(p+2qu)dx}$, & ce facteur rendra intégrable l'equation différentielle $dz - (p + 2qu)zdx - qdx = o$. Mais l'equation différentielle proposée est $\frac{dz - (p + 2qu)zdx - qdx}{zz} = o$, il faudra

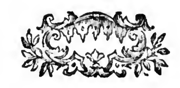
donc, pour faire evanoüir le denominateur zz, multiplier le facteur cy-dessus par zz; ainsi le facteur convenable a la différentielle proposée sera $zz \times e^{-S.(p+2qu)dx} = \frac{1}{(y-u)^2} e^{-S.(p+2qu)dx}$ (a cause de $\frac{1}{z} = y - u$) $= \frac{1}{(y-u)^2} . X$, en supposant $X = e^{-S.(p+2qu)dx}$, & multipliant la différentielle $\frac{dz-(p+2qu)zdx-qdx}{zz} = o$ par ce facteur, on aura l'intégrale $Xz - S.qXdx = C = \frac{X}{y-u} - S.qXdx$; & par consequent tous les facteurs cherchés (Art. CCCXLVIII.) seront renfermés dans $\frac{X}{(y-u)^2} . X'$; X' etant une fonction quelconque de l'intégrale $Xz - S.qXdx$, ou $\frac{X}{y-u} - S.qXdx$; d'où l'on voit que, u etant une fonction connuë de x par la supposition, on aura aussi $X = e^{-S.(p+2qu)dx}$, fonction pareillement donnée de x.

Si on vouloit appliquer cette remarque a l'equation de Riccati $dy + yydx - ax^m dx = o$, qui n'en est qu'un cas particulier, on trouveroit les facteurs qui la rendroient intégrable, pour tous les cas de l'exposant

m, dans lesquels les indeterminées feroient feparables. Car, en comparant ces deux equations, on aura $p=o$, $q=1$, $r=-ax^m$, & le facteur cy-deffus devient par la fubftitution $\frac{1}{(y-u)^2}\cdot e^{-S.2udx}$, par lequel multipliant l'equation, on aura, en fubftituant, l'intégrale $\frac{1}{y-u}\cdot e^{-2S.udx}-S.e^{-2S.udx}dx=C$, & en fuppofant que X' eft une fonction quelconque de cette intégrale, tous les facteurs feront contenûs dans la forme $\frac{X'}{(y-u)^2}\cdot\times e^{-2S.udx}$, comme nous avons demontré.

Nous eclaircirons cette remarque par un exemple. Soit l'equation différentielle $dy+ydx+yydx-\frac{dx}{x}=o$, on aura, en comparant, $p=1$, $q=1$, $r=-\frac{1}{x}$. Or la valeur de $y=\frac{1}{x}$ fatisfait a cette equation, comme on le voit en fubftituant les valeurs refpectives dans la différentielle propofée, qui devient $=o$: donc $u=\frac{1}{x}$, & $X=e^{-S.(1+\frac{2}{x})dx}=\frac{1}{xx}\cdot e^{-x}$, & par confequent on aura le facteur $\frac{1}{xx}\cdot e^{-x}\times\frac{1}{(y-u)^2}=e^{-x}\cdot\times\frac{1}{(xy-1)^2}$, a caufe de $(y-u)^2=\frac{(xy-1)^2}{xx}$. Maintenant,

ſi on multiplie l'equation propoſée par ce facteur, elle deviendra $\frac{1}{(xy-1)^2} \cdot e^{-x} \left(dy + yy\,dx + y\,dx - \frac{dx}{x}\right) = 0$, dont l'intégrale, en conſiderant x comme conſtante, ſe trouve par les methodes du Chapitre I. $\frac{-e^{-x}}{x(xy-1)} + X$, & différentiant de nouveau cette intégrale, en regardant y comme conſtante, on aura $\frac{e^{-x}dx(xxy+2xy-x-1)}{xx(xy-1)^2} + dX$. Or cette différentielle doit être egale a l'autre membre $\frac{e^{-x}}{(xy-1)^2}\left(y\,dx + yy\,dx - \frac{dx}{x}\right)$, dans lequel, a cauſe de y conſtante, on fait $dy = 0$; cette comparaiſon donne $dX = \frac{e^{-x}dx}{xx(xy-1)^2}(xxyy - 2xy + 1) = \frac{1}{xx} \cdot \times e^{-x}dx$, en diviſant par $(xy-1)^2 = xxyy - 2xy + 1$: donc l'intégrale complette eſt enfin $-\frac{e^{-x}}{x(xy-1)} + S.\frac{1}{xx}e^{-x}dx = C$ quantité conſtante.



CHAPITRE IV.

Expoſition de différentes Methodes qui ont rapport aux Chapitres precedents.

CCCXCIII.

Nous commençerons par les Methodes qu'on a trouvées pour ramener pluſieurs equations différentielles a la formule generale $Xy^n dy + y^{n+1} X' dx + y^q X'' dx = o$, dans laquelle X, X', X'' repreſentent des fonctions quelconques de x & de conſtantes, & qu'on peut toujours intégrer par le Probleme (Art. CCCLXXXII.). La premiere methode eſt celle des transformations; car, ſi on ſubſtitue dans cette formule différentes fonctions de x priſes a volonté, pour X, X', X'' & une nouvelle variable z pour xy, ou en general z^λ pour $x^\mu y^\nu$; λ, μ, ν etant des expoſans arbitraires, qu'on determine enſuite comme on veut; il eſt evident qu'on trouvera par ce moyen autant d'equations différentielles qu'on voudra, toutes reductibles a la formule generale de l'Article cité. C'eſt ainſi qu'on a pû trouver les Theoremes ſuivans.

CCCXCIV.

THEOREME I. Si dans l'equation $(ay^n dy + x^n dx)P + b(xdy - ydx)Q = o$, a & b ſont des conſtantes quelconques; P & Q des fonctions homogenes de x & de y, de mêmes, ou de différentes dimenſions entr'elles, on pourra toujours ramener cette equation a la formule generale (Art. CCCLXXXII.) en faiſant $x = yz$.

DEMONSTRATION. L'equation propoſée etant diviſée par P devient $ay^n dy + x^n dx + b(xdy - ydx) \times \frac{Q}{P} = o$. Or, ſi on ſubſtitue dans cette equation yz pour x, $y^n z^n$ pour x^n, & $zdy + ydz$ pour dx, on aura $ay^n dy + z^{n+1} y^n dy + y^{n+1} z^n dz + b(yzdy - yzdy - y^2 dz)\frac{Q}{P} = o$, ou $(a + z^{n+1})y^n dy + y^{n+1} \times z^n dz - \frac{bQ}{P} y^2 dz = o$; &, puiſque Q eſt une fonction homogene de x, & de y, ſuppoſé que μ ſoit la ſomme des expoſans de ces deux variables dans chaque terme de Q; en ſubſtituant yz au lieu de x dans cette même fonction, il eſt evident qu'on aura $Q = y^\mu Z$, Z etant une fonction de z. De même ſuppoſé que λ

ſoit la ſomme des expoſans de x & de y dans chaque terme de la fonction homogene P; en ſubſtituant yz pour x dans cette fonction, on aura $P = y^\lambda Z'$, Z' etant une fonction de z; par conſequent $\frac{Q}{P} = \frac{y^\mu Z}{y^\lambda Z'} = y^{\mu - \lambda} Z'' = y^\nu Z''$, en ſuppoſant $\mu - \lambda = \nu$, & mettant Z'' fonction de z, pour $\frac{Z}{Z'}$. Donc l'equation propoſée ſera $(a + z^{n+1}) y^n dy + y^{n+1} z^n dz - b y^{\nu+2} Z'' dz = o$, qui a la forme requiſe, puiſque $a + z^{n+1}$ eſt une fonction de z, auſſi bien que z^n, & que $-bZ''$. *C. Q. F. D.*

EXEMPLE. Soit l'equation propoſée $(x^2 dx + ay^2 dy) \times (fx^{-1}y^2 + gy) + b(xdy - ydx) \times (bx^2y^2 + Kyx^3) = o$. En la comparant avec celle du Theoreme, on trouve $n = 2$, $P = fx^{-1}y^2 + gy)$, $Q = bx^2y^2 + Kyx^3$; & en faiſant $x = yz$, on a $P = \frac{fy + gzy}{z} = y.\frac{f + gz}{z} = y^\lambda Z'$; par conſequent $\lambda = 1$, & $Z' = \frac{f + gz}{z}$. De même $Q = bz^2y^4 + Kz^3y^4 = y^4(bz^2 + Kz^3) = y^\mu Z$; par conſequent $\mu = 4$, & $Z = bz^2 + Kz^3$,

$K z^3$, d'où l'on tire $\nu = \mu - \lambda = 3$, & $\frac{Z}{Z'} = \frac{h z^3 + K z^4}{f + g z}$ $= Z''$. Donc l'equation transformée sera $(a + z^3) y^2 dy$ $+ y^3 z^2 dz - b y^5 . \frac{h z^3 + K z^4}{f + g z} dz = o$.

CCCXCV.

THEOREME II. Si dans l'equation $\left(x^n dx + a y^{\frac{-n-1-c}{c}} dy\right) P + b(x dy + c y dx) Q = o$; a, b, c etant des constantes quelconques, & P & Q etant des fonctions de x & de y telles, qu'ayant multiplié l'exposant de l'une de ces deux variables par c, ce qui reste du produit, après en avoir ôté l'exposant de l'autre variable, soit le même dans chaque terme de P, & que cette même condition se trouve aussi dans chaque terme de Q, on pourra toujours reduire cette equation a la formule generale (Art. CCCLXXXII.) en faisant $y x^c = z$.

DEMONSTRATION. Cette equation etant divisée par P devient $x^n dx + a y^{\frac{-n-c-1}{c}} dy + (x dy + c y dx) \frac{bQ}{P}$ $= o$. Or puisque $y x^c = z$, on aura $x^c dy + c y x^{c-1} dx$ $= dz$, $x dy + c y dx = \frac{dz}{x^{c-1}} = x^{1-c} dz$, $y = z x^{-c}$,

$y^{\frac{-n-c-1}{c}} = z^{\frac{-n-c-1}{c}} x^{n+c+1}$, $dy = x^{-c} dz -$ $czx^{-c-1} dx$, $y^{\frac{-n-c-1}{c}} dy = x^{n+1} z^{\frac{-n-c-1}{c}} dz -$ $cz^{\frac{-n-1}{c}} x^n dx$; & par ſubſtitution $x^n dx + ax^{n+1} \times$ $z^{\frac{-n-c-1}{c}} dz - acz^{\frac{-n-1}{c}} x^n dx + \frac{bQ}{P} x^{1-c} dz = o$, ou $\left(1 - acz^{\frac{-n-1}{c}}\right) x^n dx + ax^{n+1} z^{\frac{-n-c-1}{c}} dz + \frac{bQ}{P} x^{1-c} dz$ $= o$. Mais par la condition du Theoreme, chaque terme de P etant ſuppoſé $y^\lambda x^\mu$ doit donner $\lambda c - \mu = k$ conſtante; d'où l'on tire $\mu = \lambda c - k$, & $y^\lambda x^\mu = y^\lambda x^{\lambda c - k}$ $= \frac{y^\lambda x^{\lambda c}}{x^k} = \frac{z^\lambda x^{-\lambda c} \times x^{\lambda c}}{x^k} = \frac{z^\lambda}{x^k}$, en mettant pour y ſa valeur zx^{-c}; par conſequent chaque terme de P aura pour numerateur une puiſſance de z, comme z^λ, & tous ſes termes auront pour denominateur commun la puiſſance x^k. On prouvera de même que chaque terme de Q aura pour numerateur une puiſſance de z, comme z^μ, & que tous ſes termes auront pour denominateur commun la puiſſance x^b. Donc le quotient $\frac{Q}{P}$ aura

la forme $\frac{x^{b-k}}{Z}$, Z etant une fonction de z & de conſtantes; $\frac{bQ}{Px^{b-n}}$ ſera auſſi une fonction de z, & de conſtantes, que nous deſignerons par Z'. Donc l'equation transformée ſera $\left(1-acz^{\frac{-n-1}{c}}\right)x^n dx+ax^{n+1}z^{\frac{-n-c-1}{c}}dz$ $+Z'x^{1+b-c-k}dz=o$, qui a la forme requiſe, puiſque $1-acz^{\frac{-n-1}{c}}$, & $az^{\frac{-n-c-1}{c}}$ ſont des fonctions de z, & que les expoſans de x ſont tels qu'ils doivent être. *C. Q. F. D.*

CCCXCVI.

CoROLLAIRE. Si on ſuppoſe $c=\frac{e}{f}$ dans l'equation du Theoreme, elle deviendra $\left(x^n dx+ay^{\frac{-fn-f-e}{e}}dy\right)P$ $+b(xdy+\frac{e}{f}ydx)Q=o$, ou $\left(x^n dx+ay^{\frac{-fn-f-e}{e}}\right)P$ $+g(fxdy+eydx)Q=o$, en ſuppoſant $g=\frac{b}{f}$. Donc en faiſant $yx^{\frac{e}{f}}=z$, cette equation pourra toujours ſe reduire a la formule generale (Art. CCCLXXXII.), lorſque P, & Q auront les conditions préſcrittes dans le Theoreme, en ecrivant $\frac{e}{f}$ au lieu de c.

EXEMPLE. Soit l'equation proposée $(x^2 dx + ay^8 dy)y - (-3x dy + y dx) ax = o$. En la comparant avec l'equation $\left(x^n dx + ay^{\frac{-fn-f-e}{e}}\right)P + g(fx dy + ey dx)Q = o$, on trouve $n = 2$, $g = -1$, $f = -3$, $e = 1$, $\frac{-fn-f-e}{e} = +8$, $P = y$, $Q = ax$, & les deux fonctions P & Q, c'est a dire yx^o, & $ay^o x$ ont les conditions requises. Donc en faisant $yx^{-\frac{1}{3}} = z$, on reduira la proposée a la formule (Art. CCCLXXXII.). Et en effet après avoir fait les substitutions convenables pour y & dy, on trouve que cette equation devient $(1 + \frac{a}{3}z^9)x^2 dx + ax^3 z^8 dz + \frac{2ax^3 dz}{z} = o$, qui a la forme requise.

CCCXCVII.

THEOREME III. Si dans l'equation $ax^n dx + by^n dy + (x dy - y dx)\left(\frac{Q}{P} + \frac{S}{R}\right) = o$, dans laquelle Q & P sont des fonctions homogenes de x & de y, de mêmes, ou de différentes dimensions entr'elles, ou dont la différence des dimensions est zero, ou un nom-

bre quelconque k, & S, R sont aussi des fonctions homogenes de x & de y, telles que l'excès des dimensions de S sur celles de R soit $n-1$, on pourra toujours reduire cette equation a la formule (Art. CCCLXXXII.), en faisant $x=yz$.

DEMONSTRATION. Puisque $x=yz$, on aura $x^n=y^n z^n$, $dx=zdy+ydz$, $x^n dx=z^{n+1}y^n dy+y^{n+1}z^n dz$, $xdy-ydx=zydy-zydy-y^2dz=-y^2dz$; & par substitution, l'equation proposée deviendra $az^{n+1}y^n dy+ay^{n+1}z^n dz+by^n dy-y^2 \times dz\left(\frac{Q}{P}+\frac{S}{R}\right)=o$, ou $(az^{n+1}+b)y^n dy+ay^{n+1}\times z^n dz-y^2 dz\left(\frac{Q}{P}+\frac{S}{R}\right)=o$. Or Q, P, & S, R etant des fonctions homogenes de x & de y, en substituant zy au lieu de x dans ces fonctions, on aura (par les conditions du Theoreme) $\frac{Q}{P}=y^k Z$, Z etant une fonction de z; & de même $\frac{S}{R}=y^{n-1}Z'$, Z' etant encore une fonction de z; par consequent $\frac{Q}{P}+\frac{S}{R}=y^k Z+y^{n-1}Z'$; & $-y^2dz\left(\frac{Q}{P}+\frac{S}{R}\right)=-y^{k+2}Zdz-y^{n+1}Z'dz$: donc l'equation transformée

sera $(az^{n+1}+b)y^n dy+(az^n-Z)y^{n+1}dz-y^{k+2}Zdz=0$, qui a la forme requise. *C. Q. F. D.*

EXEMPLE. Soit l'equation proposée $ax^7dx+by^7dy+(xdy-ydx).\times\left(x^2+y^2+\frac{x^9y+y^8x}{x^3+y^3}\right)=0$. En la comparant avec celle du Theoreme, on trouve $n=7, \frac{Q}{P}=x^2+y^2, \frac{S}{R}=\frac{x^8y+y^8x}{x^3+y^3}$, &, suivant les conditions requises, $k=2$, & $9-3=6=n-1$. En substituant zy pour x, & $zdy+ydz$ pour dx dans la proposée, on la change en $az^8y^7dy+ay^8z^7dz+by^7dy+(zydy-zydy-y^2dz)\times\left(z^2y^2+y^2+\frac{z^8y^9+y^9z}{z^3y^3+y^3}\right)=0$, ou bien $(az^8+b)y^7dy+y^8\left[az^7-\left(\frac{z^8+z}{z^3+1}\right)\right]dz-y^4(z^2+1)dz=0$, equation, qui a la forme qu'on demande, & qu'on peut rendre plus simple, en la divisant par y^4, qui se trouve dans tous les termes.

CCCXCVIII.

THEOREME IV. Si dans l'equation $ax^m dx+by^n dy+(xdy+cydx)\left(\frac{P}{Q}+\frac{S}{R}\right)=0, P, Q, R, S$ sont des fonctions de x, & de y, telles qu'en supposant

$xy^{\frac{1}{c}} = z$, on ait $\frac{Q}{P} = y^k Z$, & $\frac{S}{R} = y^f Z'$, Z & Z' etant des fonctions de z, cette equation pourra se reduire a la formule de l'Article CCCLXXXII., toutes les fois qu'on aura $n = -\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1$, & k ou $f = -\frac{m}{c} - 1$.

DEMONSTRATION. L'equation proposée est $ax^m dx + by^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1} dy + (xdy + cydx) \times (y^k Z + y^f Z') = o$, en faisant $n = -\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1$, & supposant $xy^{\frac{1}{c}} = z$. Or cette supposition donne $x = zy^{-\frac{1}{c}}$, $x^m = z^m y^{-\frac{m}{c}}$, $dx = y^{-\frac{1}{c}} dz - \frac{1}{c} \times zy^{-\frac{1}{c} - 1} dy$, $y^{\frac{1}{c}} dx + \frac{1}{c} xy^{\frac{1}{c} - 1} dy = dz$, & $xdy + cydx = cy^{-\frac{1}{c} + 1} dz$; donc, par substitution, la proposée devient $ay^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c}} z^m dz - \frac{a}{c} z^{m+1} y^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1} dy + by^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1} dy + cy^{k - \frac{1}{c} + 1} Zdz + cy^{f - \frac{1}{c} + 1} \times Z'dz = o$. Cette equation, en supposant $k = -\frac{m}{c} - 1$, devient $y^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c}} (az^m + cZ) dz + y^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1} \times$

$(b - \frac{a}{c} z^{m+1}) dy + cy^{f - \frac{1}{c} + 1} Z' dz = 0$; & en supposant $f = -\frac{m}{c} - 1$, & laissant k, elle devient $y^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c}} (az^m + cZ') dz + y^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1} (b - \frac{a}{c} z^{m+1}) dy + cy^{k - \frac{1}{c} + 1} Z dz = 0$. Deux equations, qui sont dans le cas de la formule de l'Article CCCLXXXII. *C. Q. F. D.*

EXEMPLE. Soit l'equation proposée $ax^6 dx + by^{\frac{5}{2}} dy + (xdy - 2ydx) \left\{ \frac{x^2 y^{\frac{5}{2}} + y^{\frac{7}{2}}}{x^3 + xy} + \frac{x^3 y}{x + y^{\frac{1}{2}}} \right\} = 0$. En comparant cette equation avec celle du Theoreme, on trouve qu'elle a les conditions requises. Car on a $m = 6$, $c = -2$, $n = \frac{5}{2} = -\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1 = 3 + \frac{1}{2} - 1$, $xy^{\frac{1}{c}} = xy^{-\frac{1}{2}} = z$, $x = zy^{\frac{1}{2}}$, $\frac{x^2 y^{\frac{5}{2}} + y^{\frac{7}{2}}}{x^3 + xy} = \frac{z^2 y^{\frac{7}{2}} + y^{\frac{7}{2}}}{z^3 y^{\frac{3}{2}} + zy^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^2 (z^2 + 1)}{z^3 + z}$; par consequent $k = 2 = -\frac{m}{c} - 1 = 3 - 1$, & $Z = \frac{z^2 + 1}{z^3 + z}$; $\frac{x^3 y}{x + y^{\frac{1}{2}}} = \frac{z^3 y^{\frac{3}{2} + 1}}{zy^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} =$

$= \frac{y^2 z^3}{z+1} = y^f Z'$; par consequent $f = 2$, & $Z' = \frac{z^3}{z+1}$. En substituant toutes ces valeurs dans la formule du Theoreme $y^{-\frac{m}{e}-\frac{1}{e}} (az^m + cZ)\,dz + y^{-\frac{m}{e}-\frac{1}{e}-1} \times (b - \frac{a}{c} z^{m+1})\,dy + cy^{f-\frac{1}{e}+1} Z'dz = o$, on la change en $y^{\frac{7}{2}} \left[az^6 - \left(\frac{2z^3+2}{z^3+z}\right) \right] dz + y^{\frac{5}{2}} (b + \frac{1}{2} az^7)\,dy - \frac{2y^{\frac{7}{2}} z^3 dz}{z+1} = o$, equation qui est dans le cas de la formule de l'Article CCCLXXXII., & qu'on peut rendre plus simple en la divisant par $y^{\frac{5}{2}}$, qui se trouve dans tous ses termes.

CCCXCIX.

THEOREME V. Si dans l'equation $dx - \frac{nx\,dy}{y} = \frac{y^{t+n-1} x^r Z\,dy + y^t x^r Z'dx}{y^m x^p Z'' + y^q x^h Z'''}$, on fait $\frac{x}{y^n} = z$, & que Z, Z', Z'', Z''' soient des fonctions de z & de constantes, cette equation se reduira a la formule de l'Article CCCLXXXII., toutes les fois qu'on aura ces deux egalités $q = t$, & $h = r$, ou ces deux cy $m = t$, & $p = r$.

DEMONSTRATION. Puisque $xy^{-n} = z$, on aura

$x = zy^n$; $y^{-n}dx - nxy^{-n-1}dy = dz$; $dx - \frac{nxdy}{y} = y^n dz$; $dx = y^n dz + nzy^{n-1}dy$; & en substituant pour x & pour dx leurs valeurs en y & en z dans l'equation proposée, elle deviendra $y^n dz = \frac{y^{t+n-1+nr}z^r Z dy + y^{t+nr}z^r Z'(y^n dz + nzy^{n-1}dy)}{y^{m+pn}z^p Z'' + y^{q+bn}z^b Z'''}$, & par reduction $y^{m+pn+n}z^p Z'' dz + y^{q+bn+n}z^b Z''' dz = y^{t+n-1+nr} z^r Z dy + n y^{t+nr+n-1} z^{r+1} Z' dy + y^{t+nr+n} z^r Z' dz$, ou bien $y^{t+nr+n-1}(z^r Z + n z^{r+1} Z')dy + y^{t+nr+n} z^r Z' dz - y^{m+pn+n} z^p Z'' dz - y^{q+bn+n} z^b Z''' dz = 0$. Or si on a ces deux egalités $q = t$, & $b = r$, on aura aussi $q + bn + n = t + nr + n$, & le terme $y^{q+bn+n} z^b Z' dz = y^{t+nr+n} \times z^r Z'' dz$; par consequent $y^{t+nr+n} z^r Z' dz - y^{q+bn+n} \times z^b Z''' dz = y^{t+m+n}(z^r Z' dz - z^r Z''' dz)$; & l'equation deviendra $y^{t+nr+n-1}(z^r Z + n z^{r+1} Z')dy + y^{t+nr+n}(z^r Z' - z^r Z''')dz - y^{m+pn+n} z^p Z'' dz = 0$, qui a les conditions qu'exige la formule de l'Art. CCCLXXXII. Puisque la différence des exposans de y dans les deux premiers termes est l'unité, & que les quantités qui se

trouvent dans les parenthefes font toutes des fonctions de z.

On trouve de même en fuppofant les deux autres egalités $m=t$, & $p=r$, que le terme $y^{m+pn+n} \times z^p Z'' dz = y^{t+nr+n} z^r Z'' dz$; par confequent $y^{t+nr+n} \times z^r Z' dz - y^{m+pn+n} z^p Z'' dz = y^{t+nr+n} (z^r Z' - z^r \times Z'') dz$, d'où l'on tire la même conclufion.

EXEMPLE I. Soit propofée l'equation $dx - \frac{x dy}{y} = \frac{F dy}{F' + y^k F''}$, dans laquelle F, F', F'' font des fonctions de $\frac{x}{y}$ & de conftantes. En la comparant avec l'equation generale du Theoreme, on trouve d'abord $-\frac{nx}{y} = -\frac{x}{y}$, d'où l'on tire $n=1$, & $\frac{x}{y^n}$ ou $z = \frac{x}{y}$; par confequent F, F', F'' font des fonctions de z & de conftantes. On trouve enfuite les quatre equations fuivantes $y^{t+n-1} x^r Z = F$; $y^t x^r Z' = o$; $y^m x^p Z'' = F'$; $y^q x^h Z''' = y^k F''$; defquelles on tire $t = o = r$, & $Z = F$; $Z' = o$; $m = o = p$; & $Z'' = F'$; $q = k$; $h = o$; & $Z''' = F''$, ce qui donne les deux egalités $m = t$, & $p = r$; en fubftituant les valeurs qu'on vient de trouver dans la formule du Theoreme, on voit qu'elle devient $F dy -$

$yF'dx - y^{k+1}F''dz = o$, equation, qui a les conditions requiſes.

EXEMPLE II. Soit propoſée l'equation $dx + \frac{xdy}{y} = \frac{ay^3x^3dy + by^6x^4dx}{c + fy^5x^3}$. En la comparant avec l'equation du Theoreme, on trouve d'abord $n = -1$; $\frac{x}{y^n} = z = \frac{x}{y^{-1}}$, & $x = zy^{-1}$. En ſubſtituant cette valeur de x dans la fraction $\frac{ay^3x^3dy + by^6x^4dx}{c + fy^5x^3}$, on la change en $\frac{az^3dy + by^2z^4dx}{c + fy^2z^3}$, & en continuant la comparaiſon, on trouve les quatre equations ſuivantes $y^{t+n-1}x^rZ = az^3$; $y^rx^rZ' = by^2z^4$; $y^mx^pZ'' = c$; & $y^qx^bZ''' = fy^2z^3$, deſquelles on tire $t+n-1 = t-2 = o$; $t = 2$; $r = o$, & $Z = az^3$; $Z' = bz^4$; $m = o$, $p = o$, & $Z'' = c$, $q = 2$, $b = o$, & $Z''' = fz^3$; ce qui donne les deux egalités $q = t$, & $b = r$. Ces valeurs etant ſubſtituées dans la formule generale du Theoreme, elle devient $y^o(az^3 - bz^5)dy + y^1(bz^4 - fz^3)dz - y^{-1}cdz = o$, ou $y(az^3 - bz^5) + y^2(bz^4 - fz^3)dz - cdz = o$, equation qui

a les conditions que demande la formule de l'Article CCCLXXXII.

CCCC.

Avant de paſſer a d'autres methodes, qui ont rapport aux Chapitres precedens, nous joindrons icy un Probleme, qui peut être d'un grand uſage dans les equations différentielles que nous venons de traiter.

PROBLEME I. Soit l'equation différentielle $dy + yXdx + y^2X'dx + X''dx = o$, X, X', X'' deſignant des fonctions de x, & etant données deux valeurs de y en fonctions de x, qui ſatisfaſſent a l'equation propoſée; c'eſt a dire, qui la rendent par les ſubſtitutions $= o$, reſoudre generalement cette equation, & trouver le facteur qui la rende intégrable.

SOLUTION. Suppoſons que P, Q ſoient les fonctions de x, qui ſatisfaſſent a l'equation, on aura par les conditions du Probleme $dP + PXdx + P^2X'dx + X''dx = o$, & $dQ + QXdx + Q^2X'dx + X''dx = o$. Soit fait $\frac{y - P}{y - Q} = z$, ou $y = \frac{P - Qz}{1 - z}$, on aura en différentiant $dy = \frac{dP - zdP + Pdz - Qdz - zdQ + z^2dQ}{(1 - z)^2}$, & ſubſtituant les valeurs de y & dy dans la différentielle propoſée, & multipliant par $(1 - z)^2$, nous aurons

$(1-z)dP - z(1-z)dQ + (P-Q)dz + X(1-z)Pdx - X(1-z)Qzdx + X'P^2dx - 2X'PQzdx + X'Q^2zzdx + X''(1-z)^2dx = o.$

De plus ſubſtituant dans cette equation a la place de dP, dQ leurs valeurs que donnent les deux equations différentielles precedentes, on aura en ordonnant les termes

$$\begin{array}{llll} -X(1-z)Pdx & -X'(1-z)P^2dx & -X''(1-z)dx & +(P-Q)dz = o \\ +Xz(1-z)Qdx & +X'z(1-z)Q^2dx & +X''z(1-z)dx & \\ +X(1-z)Pdx & +X'P^2dx & +X''(1-z)^2dx & \\ -Xz(1-z)Qdx & -2X'PQzdx & & \\ & +X'Q^2z^2dx & & \end{array}$$

Enfin effaçant les termes qui ſe detruiſent, & ordonnant l'equation nous aurons $X'zP^2dx + X'zQ^2dx - 2X'PQzdx + (P-Q)dz = o$, ou $X'(P-Q)dx + \frac{dz}{z} = o$, & $\frac{dz}{z} = -X'(P-Q)dx$, d'où l'on aura en intégrant $z = e^{-S.(P-Q)X'dx}$, & par conſequent on aura generalement l'intégrale $e^{S.X'(P-Q)dx} + \frac{y-P}{y-Q} = c.$ conſtante, en ſubſtituant $\frac{y-P}{y-Q}$ a la place de z.

Maintenant pour trouver le facteur cherché, il suffit d'observer que l'equation proposée a été multipliée, après les substitutions, par $(1-z)^2$, & divisée par $z(P-Q)$. Donc, en multipliant tout d'un coup par $\frac{(1-z)^2}{(P-Q)z}$, l'equation sera intégrable, & le facteur sera $\frac{(1-z)^2}{(P-Q)z}$, ou $\frac{P-Q}{(y-Q)(y-P)}$, a cause de $z=\frac{y-P}{y-Q}$. On voit par ce Probleme qu'ayant des solutions particulieres des equations différentielles de la forme proposée, on peut en trouver aisément la solution generale, & les facteurs qui les rendent intégrables. L'equation de Riccati est un Cas de cette forme.

CCCCI.

Si, au lieu de chercher le facteur, on supposoit au contraire qu'il fût donné, tel que $(y+P)^n$, & qu'on voulût determiner les fonctions X, X' d'une equation différentielle telle que $y\,dy+yX\,dx+X'dx=o$, ensorte que ce facteur rendît l'equation intégrable. Il faudroit se servir de la methode du Chapitre I. (Art. CCCXXXII.), c'est a dire, qu'on feroit $\frac{1}{dx}.\times d.\{y(y+P)^n\}=\frac{1}{dy}.d.(Xy+X')\times(y+P)^n$; $d.$ designant la différentielle de la quantité renfermée

dans les parenthefes, & en fuppofant P une fonction de x feulement. Si on différencie par le Theoreme cité, en confiderant y comme conftante dans le premier membre & x dans le fecond, on aura la différentielle fuivante $ny(y+P)^{n-1}\frac{dP}{dx}=X(y+P)^n+n(Xy+X')(y+P)^{n-1}$, & en divifant par $(y+P)^{n-1}$, nous aurons $\frac{nydP}{dx}=(n+1)Xy+XP+nX'$; d'où l'on tire $X=\frac{ndP}{(n+1)dx}$, & $X'=-\frac{XP}{n}=-\frac{PdP}{(n+1)dx}$; & en fubftituant on aura l'equation $ydy+\frac{nydP}{n+1}-\frac{PdP}{n+1}=o$, laquelle, etant multipliée par $(y+P)^n$, fera intégrable. Or cette equation etant homogene fera auffi intégrable en la divifant par $(n+1)\times yy+nyP-PP=(y+P)\{(n+1)y-P\}$ (Art. CCCLXXIV.). Donc, puifqu'on a les deux facteurs $(y+P)^n$, & $\frac{1}{(y+P)((n+1)y-P)}$, en divifant l'un par l'autre, & egalant le quotient qui en refulte a une conftante arbitraire, on aura l'intégrale complette. Ainfi l'intégrale de la différentielle $ydy+\frac{nydP}{n+1}-\frac{PdP}{n+1}=o$ fera generalement $(y+P)^{n+1}\{(n+1)\times y-P\}=C$ conftante.

CCCCII.

CCCCII.

Si on vouloit prendre un facteur plus compliqué, tel que $(yy+Py+Q)^n$, on trouveroit par les mêmes methodes les fonctions X, X', ensorte que l'equation differentielle precedente devient intégrable. On aura (Art. CCCXXXII.) $\frac{1}{dx} d. \{y(yy+Py+Q)^n\} = \frac{1}{dy} . d\{Xy+X'\} \times (yy+Py+Q)^n$. Mais puisque X, X', P, Q sont des fonctions de x, on aura en differentiant comme cy-dessus $ny(yy+Py+Q)^{n-1} \times \left(y\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dx}\right) = X(yy+Py+Q)^n + n(Xy+X') \times (2y+P) \times (yy+Py+Q)^{n-1}$, &, en divisant par $(yy+Py+Q)^{n-1}$, nous aurons $nyy\frac{dP}{dx}+ny\frac{dQ}{dx} = \begin{matrix}(2n+1)Xyy+(n+1)XPy+XQ, \\ +2nX'y \quad\quad +nX'P\end{matrix}$ & en comparant les termes homologues, on a les equations 1.° $(2n+1)Xdx = ndP$; 2.° $(n+1)XPdx+2nX'dx = ndQ$; 3.° $XQ+nX'P=0$. La premiere de ces equations donne $X = \frac{ndP}{(2n+1)dx}$, & la derniere $X' = -\frac{XQ}{nP}$, ou $X' = -\frac{QdP}{(2n+1)Pdx}$; lesquelles valeurs etant substi-

tuées dans la seconde equation, on aura $n\,dQ = \frac{n(n+1)P\,dP}{2n+1} - \frac{2nQ\,dP}{(2n+1)P}$, ou bien $(2n+1)P\,dQ + 2Q\,dP = (n+1)P^2\,dP$. Enfin multipliant par $P^{\frac{-2n+1}{2n+1}}$, & en intégrant, on trouvera $(2n+1)P^{\frac{2}{2n+1}}Q = C.$ const. $+ (n+1)S.P^{\frac{2n+3}{2n+1}}dP$, ou $(2n+1)P^{\frac{2}{2n+1}}Q =$ C. const. $+ \frac{2n+1}{4}P^{\frac{4n+4}{2n+1}}$; ce qui donne $Q = \frac{C}{(2n+1)P^{\frac{2}{2n+1}}} + \frac{1}{4}P^{\frac{4n+2}{2n+1}} = \alpha P^{\frac{-2}{2n+1}} + \frac{1}{4}P^2$, en supposant $\alpha = \frac{C}{2n+1}$. Donc, puisque $X\,dx = \frac{n\,dP}{2n+1}$, & $X'dx = -\frac{\alpha P^{\frac{-2n-3}{2n+1}}dP}{2n+1} - \frac{P\,dP}{4(2n+1)}$, l'equation différentielle $y\,dy + \frac{ny\,dP}{2n+1} - \frac{P\,dP}{4(2n+1)} - \frac{\alpha}{2n+1}P^{\frac{-2n-3}{2n+1}}dP = 0$ deviendra intégrable, si on la multiplie par $\left(yy + Py + \frac{1}{4}P^2 + \alpha P^{\frac{-2}{2n+1}}\right)^n$.

Si on fuppofoit $n = -1$, ou $\frac{-2n-3}{2n+1} = 1$, l'equation precedente deviendroit homogene; & en faifant $\frac{-2n-3}{2n+1} = o$, ou $n = -\frac{3}{2}$, le terme $P^{\frac{-2n-3}{2n+1}}$ fe reduit a 1, d'où l'on voit que ces deux Cas font très-faciles. Mais, fi on ne fuppofe pas $\frac{-2n-3}{2n+1} = o$, ou $= 1$, il y aura plus de difficulté. Soit fait $\frac{-2n-3}{2n+1} = m$, & par confequent $2n = \frac{-m-3}{m+1}$ l'equation différentielle fera $y\,dy + \frac{1}{4}(m+3)y\,dP + \frac{1}{8}(m+1)P\,dP + \frac{1}{2}a(m+1)P^m\,dP = o$ & elle deviendra intégrable, en la multipliant par le facteur $\left(yy + Py + \frac{1}{4}P^2 + aP^{m+1}\right)^{\frac{-m-3}{2(m+1)}}$, comme on voit en fubftituant dans le facteur deja trouvé la valeur de n en m.

Si on prenoit pour P des fonctions quelconques de x, on voit que ces equations pourroient devenir fi compliquées, qu'on les traiteroit difficilement par d'autres methodes que par celle-cy, qui en donne la refolution affez aifément.

CCCCIII.

Nous allons expofer dans les Problemes fuivans d'autres methodes pour intégrer par le moyen de l'Article CCCLXXXII. plufieurs equations différentielles a deux variables x & y, qui renferment des fonctions quelconques du rapport $\frac{dx}{dy}$, & qu'il feroit fouvent difficile d'intégrer autrement. Nous fuppoferons toujours dans ces Problemes $z = \frac{dx}{dy}$, ou $z\,dy = dx$.

PROBLEME II. Intégrer l'equation $x = yZ + Z'$, dans laquelle Z & Z' font des fonctions quelconques de z, ou de $\frac{dx}{dy}$.

SOLUTION. En différentiant l'equation propofée, on trouve $dx = Z\,dy + y\,dZ + dZ' = z\,dy$, d'où l'on tire $Z\,dy - z\,dy + y\,dZ + dZ' = o$, & $dy + \frac{y\,dZ}{Z-z} + \frac{dZ'}{Z-z} = o$. Or cette equation eft dans le cas de la formule de l'Art. CCCLXXXII. Car puifque Z, Z', & $Z - z$ font des fonctions de z, il eft evident qu'on aura $dZ = F\,dz$, & $dZ' = F'\,dz$, F & F' etant auffi des fonctions de z, & par confequent $\frac{dZ}{Z-z} = V\,dz$, & $\frac{dZ'}{Z-z} = V'\,dz$, V, & V' etant encore des fonctions de

z: donc l'equation $dy + \frac{y\,dZ}{Z-z} + \frac{dZ'}{Z-z} = o$ ſe reduit a cette forme $y^o\,dy + y^1\,V dz + y^o\,V' dz = o$, qui a les conditions requiſes dans l'Article CCCLXXXII. En prenant e pour le nombre dont le logarithme eſt l'unité, & C pour une conſtante quelconque, on trouve aiſément par cet Article l'equation $y e^{S.Vdz} + S.(V'dz \times e^{S.Vdz}) = C$, & $y = \frac{C - S.(V'dz \times e^{S.Vdz})}{e^{S.Vdz}}$. On aura donc la valeur de z en y; & ſubſtituant cette valeur dans l'equation $dx = z\,dy$, on trouvera auſſi par les methodes de la premiere Partie $x = S.z\,dy$; par conſequent on aura la relation entre y, & x. *C. Q. F. T.*

CCCCIV.

PROBLEME III. Trouver les Cas d'intégrabilité de l'equation $x^m y^n z^r = F$, dans laquelle on ſuppoſe $z = \frac{dx}{ay}$, & F une fonction de la quantité $x^q y^s z^t$.

SOLUTION. En faiſant $x^q y^s z^t = u$, F ſera une fonction de u, & on aura $x = u^{\frac{1}{q}} y^{-\frac{s}{q}} z^{-\frac{t}{q}}$; $x^m = u^{\frac{m}{q}} y^{-\frac{ms}{q}} z^{-\frac{mt}{q}}$; $y^n z^r = \frac{F}{x^m} = F u^{-\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}} z^{\frac{mt}{q}}$; $y^n =$

$F u^{-\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}} z^{\frac{mt-rq}{q}}$; $y^{\frac{nq-ms}{q}} = F u^{-\frac{m}{q}} z^{\frac{mt-rq}{q}}$; $y = F^{\frac{q}{nq-ms}} u^{\frac{-m}{nq-ms}} z^{\frac{mt-rq}{nq-ms}}$; & $y^{-\frac{s}{q}} = F^{\frac{-s}{nq-ms}} u^{\frac{ms}{nqq-mqs}} \times z^{\frac{-mts+rqs}{nqq-msq}}$; en mettant cette valeur de $y^{-\frac{s}{q}}$ dans l'equation $x = u^{\frac{1}{q}} z^{-\frac{t}{q}} y^{-\frac{s}{q}}$, on aura $x = u^{\frac{1}{q}} z^{-\frac{t}{q}} \times \left(F^{\frac{-s}{nq-ms}} u^{\frac{ms}{nqq-mqs}} z^{\frac{-mts+rqs}{nqq-mqs}}\right) = F^{\frac{-s}{nq-ms}} u^{\frac{n}{nq-ms}} z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}$.

Supposant, pour abreger le calcul, $V = F^{\frac{-s}{nq-ms}} \times u^{\frac{n}{nq-ms}}$, & $V' = F^{\frac{q}{nq-ms}} u^{\frac{-m}{nq-ms}}$, on aura $x = V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}$, & $y = V' z^{\frac{mt-rq}{nq-ms}}$, V, V' etant des fonctions de u. On trouvera en différentiant $dx = z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} dV + \left(\frac{rs-nt}{nq-ms}\right) V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz$, & $dy = z^{\frac{mt-rq}{nq-ms}} dV' + \frac{mt-rq}{nq-ms} V' z^{\frac{mt-rq}{nq-ms}-1} dz$, & l'equation $dx = z\,dy$ deviendra par substitution $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} dV + \frac{rs-nt}{nq-ms} V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz = z^{\frac{mt-rq+nq-ms}{nq-ms}} dV' + \frac{mt-rq}{nq-ms} z^{\frac{mt-rq}{nq-ms}} V' dz$. Nous

designerons cette equation par (A), & nous chercherons les Cas dans lesquels on peut l'intégrer, ou, ce qui revient au même, separer ses deux indeterminées u & z; car alors on aura la valeur de z par u, ou celle de u par z, & en substituant une de ces valeurs dans les deux equations, que nous avons trouvées cy-dessus entre y, & les variables u & z, & entre x, & ces mêmes variables, on en tirera l'equation entre y & x.

CAS I. Lorsque $tm - rq = o$. Car alors l'equation (A) devient $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} dV + \frac{rs-nt}{nq-ms} V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz = z dV'$, ou $(a+1) V z^a dz + z^{a+1} dV - z dV' = o$, en supposant $\frac{rs-nt}{nq-ms} = a+1$. Or cette equation a les conditions requises dans l'Article CCCLXXXII., puisque V, & V' etant des fonctions de u, on aura $dV = V'' du$, & $dV' = V''' du$, V'' & V''' etant encore des fonctions de u.

Mais il n'est pas necessaire dans ce premier cas de chercher l'intégrale de l'equation (A). Car puisque $tm - rq = o$, ou $q = \frac{tm}{r}$, si on fait $\frac{t}{r} = p$, on aura $t = pr$; $q = pm$; $x^q y^s z^t = y^s x^{pm} z^{pr}$, & l'equation proposée sera $y^n x^m z^r = \varphi(y^s x^{pm} z^{pr})$, en mettant $\varphi(y^s x^{pm} z^{pr})$ pour exprimer la fonction de $x^q y^s z^t$, que nous avions

appellée F. Donc, en faisant $x^m z^r = k$, on aura $x^{pm} \times z^{pr} = k^p$, & $y^n k = \varphi(y^s k^p)$. Or il suit evidemment de cette derniere equation entre k & y, & leurs puissances ou fonctions, que k est une fonction de y, que nous designerons par Y; on aura donc $x^m z^r = Y$, & $x^{\frac{m}{r}} z = Y^{\frac{1}{r}}$, ou a cause de $z = \frac{dx}{dy}$, $x^{\frac{m}{r}} \cdot \frac{dx}{dy} = Y^{\frac{1}{r}}$, & $x^{\frac{m}{r}} dx = Y^{\frac{1}{r}} dy$, equation dans laquelle les variables x & y sont separées, & qu'on peut intégrer facilement.

CAS II. Lorsque $rs - nt = o$. Car alors l'equation (A) devient $dV = z^{\frac{mt-rq}{nq-ms}+1} dV' + \frac{mt-rq}{nq-ms} V' z^{\frac{mt-rq}{nq-ms}} dz$, qui a les conditions de l'Article CCCLXXXII.

On trouvera aussi dans ce Cas, comme dans le precedent l'intégrale de l'equation proposée sans chercher celle de l'equation (A). Car puisque $rs - nt = o$ ou $\frac{s}{n} = \frac{t}{r}$, en faisant $\frac{s}{n} = \frac{t}{r} = p$, on aura $s = pn$, $t = pr$, & l'equation proposée $x^m y^n z^r = \varphi(x^q y^s z^t)$ deviendra $x^m y^n z^r = \varphi(x^q y^{pn} z^{pr})$; donc en faisant $y^n z^r = k$, on aura $y^{pn} z^{pr} = k^p$, & $x^m k = \varphi(x^q k^p)$; par consequent k sera une fonction de x, que nous designe-

rons

rons par X; donc $y^n z^r = X$; $y^{\frac{n}{r}} z = X^{\frac{1}{r}}$; ou $y^{\frac{n}{r}} . \frac{dx}{dy} = X^{\frac{1}{r}}$, & $\frac{dx}{X^{\frac{1}{r}}} = \frac{dy}{y^{\frac{n}{r}}}$, equation ſeparée & facilement intégrable.

CAS III. Lorſque $nq - ms + tm - rq = rs - nt$. Car alors on a $\frac{tm - rq}{nq - ms} = \frac{nq - ms + tm - rq}{nq - ms} - 1 = \frac{rs - nt}{nq - ms} - 1$; par conſequent l'equation (A) devient

$$z^{\frac{rs - nt}{nq - ms}} dV + \frac{rs - nt}{nq - ms} V z^{\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1} dz = z^{\frac{rs - nt}{nq - ms}} dV' + \left(\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1\right) V' z^{\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1} dz,$$

ou

$$z^{\frac{rs - nt}{nq - ms}} dV - z^{\frac{rs - nt}{nq - ms}} dV' = \left(\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1\right) V' z^{\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1} dz - \left(\frac{rs - nt}{nq - ms}\right) V z^{\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1} dz,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dV - dV'}{\left(\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1\right) V' - \left(\frac{rs - nt}{nq - ms}\right) V} = \frac{z^{\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1} dz}{z^{\frac{rs - nt}{nq - ms}}},$$

equation dans laquelle les indeterminées ſont ſeparées.

Il reſte un autre Cas, lorſque $nq - ms = o$, alors l'equation $y^{\frac{nq - ms}{q}} = F u^{-\frac{m}{q}} z^{\frac{mt - rq}{q}}$, a cauſe de $\frac{nq - ms}{q}$

$=o$, devient $Fu^{-\frac{m}{q}}z^{\frac{ms-rq}{q}}=1$, ou $z^{\frac{qr-ms}{q}}=Fu^{-\frac{m}{q}}$ fonction de u, & l'equation proposée rentre dans le cas des equations homogenes, toutes les fois que $n=-m$, & $q=-s$.

CCCCV.

PROBLEME IV. Trouver les cas d'intégrabilité de l'equation $x=y^k z^r \varphi u+\varphi' u$; φu & $\varphi' u$ etant deux fonctions de la même quantité $u=y^p z^n$, & $z=\frac{dx}{dy}$.

SOLUTION. 1.° Puisque $y^p z^n=u$, on aura $z^n=uy^{-p}$; $z=u^{\frac{1}{n}}y^{-\frac{p}{n}}$; $z^r=u^{\frac{r}{n}}y^{-\frac{pr}{n}}$; $y^k z^r=u^{\frac{r}{n}}y^{k-\frac{pr}{n}}$, & l'equation proposée sera $x=u^{\frac{r}{n}}y^{k-\frac{pr}{n}}\varphi u+\varphi' u=Vy^{k-\frac{pr}{n}}+V'$, en supposant $V=u^{\frac{r}{n}}\varphi u$, & $V'=\varphi' u$; on tire de la $dx=y^{k-\frac{pr}{n}}dV+\left(k-\frac{pr}{n}\right)\times Vy^{k-\frac{pr}{n}-1}dy+dV'$. Donc, a cause de l'equation

$\frac{dx}{dy} = z$, ou $dx = z\,dy$, on aura $y^{k - \frac{pr}{n}} dV + (k - \frac{pr}{n}) \times$

$Vy^{k - \frac{pr}{n} - 1} dy + dV' = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy$, ou $(k - \frac{pr}{n}) \times$

$Vy^{k - \frac{pr}{n} - 1} dy - u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy + y^{k - \frac{pr}{n}} dV + dV' = o$:

Or cette equation, en ſuppoſant $k - \frac{pr}{n} - 1 = -\frac{p}{n}$, eſt dans le cas de la formule de l'Article CCCLXXXII., puiſqu'elle devient $\left[(k - \frac{pr}{n}) V - u^{\frac{1}{n}}\right] y^{-\frac{p}{n}} dy + y^{-\frac{p}{n} + 1} dV + dV' = o$, dans laquelle V, V', & $(k - \frac{pr}{n}) V - u^{\frac{1}{n}}$ ſont des fonctions de u. On trouvera donc par l'Article CCCLXXXII. la valeur de u en z, & celle de z en u, & ayant ſubſtitué une de ces deux valeurs dans les equations $y = u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}}$, & $x = Vy^{k - \frac{pr}{n}} + V'$, on en deduira enſuite une equation entre y & x.

2.° De la ſuppoſition $y^p z^n = u$, ou $y = u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}}$

on tire $y^k = u^{\frac{k}{p}} z^{-\frac{nk}{p}}$; $y^k z^r = u^{\frac{k}{p}} z^{r-\frac{nk}{p}}$, & $dy = \frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}} u^{\frac{1}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}-1} dz$; par consequent $dx = z\,dy = \frac{1}{p} z^{1-\frac{n}{p}} u^{\frac{1}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}} dz$. On a d'ailleurs par l'equation proposée $x = u^{\frac{k}{p}} z^{r-\frac{nk}{p}} \varphi u + \varphi' u = V'' z^{r-\frac{nk}{p}} + V'$, en faisant $u^{\frac{k}{p}} \varphi u = V''$, & $\varphi' u = V'$, & on tire de la $dx = z^{r-\frac{nk}{p}} dV'' + \left(r - \frac{nk}{p}\right) \times V'' z^{r-\frac{nk}{p}-1} dz + dV'$. On aura donc $\frac{1}{p} z^{1-\frac{n}{p}} u^{\frac{1}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}} dz = z^{r-\frac{nk}{p}} dV'' + \left(r - \frac{nk}{p}\right) V'' z^{r-\frac{nk}{p}-1} dz + dV'$, equation qu'on voit bien être dans le Cas de l'Article CCCLXXXIII., lorsque $1 - \frac{n}{p} = r - \frac{nk}{p}$. Car si on ecrit dans cette equation $1 - \frac{n}{p}$ pour $r - \frac{nk}{p}$; elle deviendra $\frac{1}{p} z^{1-\frac{n}{p}} u^{\frac{1}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}} dz =$

$z^{1-\frac{n}{p}} dV'' + (1-\frac{n}{p}) V'' z^{-\frac{n}{p}} dz + dV'$, ou bien $\left[(1-\frac{n}{p}) V'' + \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}}\right] z^{-\frac{n}{p}} dz + \left(V''' - \frac{1}{p} u^{\frac{1}{p}-1}\right) \times$ $z^{1-\frac{n}{p}} du + dV' = o$, en faisant $dV'' = V''' du$. On peut aussi ecrire $z^0 V^{IV} du$ pour dV', en supposant $dV' = V^{IV} du$. La proposée s'intégrera ensuite comme dans le Cas precedent.

CCCCVI.

Les equations différentielles, que nous venons de traiter, renferment des fonctions de $\frac{dy}{dx}$; mais il arrive assez souvent que par la substitution de $\frac{dy}{dx} = z$, ou $dy = z dx$, on parvienne a des equations finies, & même algebriques entre x & y, sans employer les methodes ordinaires d'intégration; c'est ce que nous allons eclaircir par des Exemples.

Soit la différentielle $y dx - x dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$; en debarassant cette equation du signe radical, on aura $yy dx^2 - 2xy dx dy + xx dy^2 = aa dx^2 + aa dy^2$; &

faiſant $dy = z\,dx$, & diviſant par dx, l'equation ſe reduit a cette forme $y = zx + a\sqrt{1+zz}$, qui renferme encore une expreſſion différentielle a cauſe de $\frac{dy}{dx} = z$. Si on différentie une ſeconde fois l'equation $y = zx + a\sqrt{1+zz}$, on aura $dy = z\,dx + x\,dz + \frac{az\,dz}{\sqrt{1+zz}}$. Or ſubſtituant $z\,dx$ a la place de dy, on aura $x\,dz + \frac{az\,dz}{\sqrt{1+zz}} = 0$, & diviſant par dz on aura $x = \frac{-az}{\sqrt{1+zz}}$. Enfin a cauſe de $y = zx + a\sqrt{1+zz}$, on trouvera par ſubſtitution $y = \frac{a}{\sqrt{1+zz}}$. Il ſera maintenant aiſé de faire diſparoitre la variable z des deux equations $x = \frac{-az}{\sqrt{1+zz}}$, & $y = \frac{a}{\sqrt{1+zz}}$; il ne faut qu'ajouter enſemble les quarrés xx & yy, on aura $xx + yy = \frac{a^2z^2 + a^2}{1+z^2} = a^2$, equation algebrique entre les variables x & y, d'où l'on voit ce cas aſſéz ſingulier, qu'une différentiation réiterée peut conduire a l'intégrale cherchée.

On resoudroit de même l'equation plus compliquée $ydx - xdy = a\sqrt[3]{dx^3 + dy^3}$, dont on auroit de la peine a trouver l'intégrale par d'autres voyes. Nous supposerons $dy = zdx$, pour avoir $\sqrt[3]{dx^3 + dy^3} = dx\sqrt[3]{1 + z^3}$, & par consequent $y - zx = a\sqrt[3]{1 + z^3}$, & $y = zx + a\sqrt[3]{1 + z^3}$; maintenant par une double différentiation, on trouve $dy = zdx + xdz + \frac{azzdz}{\sqrt[3]{(1 + z^3)^2}}$; d'où l'on tire $o = xdz + \frac{az^2dz}{\sqrt[3]{(1 + z^3)^2}}$, ou $x = \frac{-az^2}{\sqrt[3]{(1 + z^3)^2}}$, & $y = \frac{a}{\sqrt[3]{(1 + z^3)^2}}$ & en ajoutant les cubes, on trouvera $y^3 + x^3 = \frac{a^3(1 - z^6)}{(1 + z^3)^2} = -a^3 + \frac{2a^3}{1 + z^3}$; d'où l'on tire $\frac{1}{1 + z^3} = \frac{a^3 + x^3 + y^3}{2a^3}$, & par consequent $y = \frac{a}{\sqrt[3]{(1 + z^3)^2}} - \frac{(a^3 + x^3 + y^3)^{\frac{2}{3}}}{a\sqrt[3]{4}}$, & enfin $4a^3y^3 = (a^3 + x^3 + y^3)^2$.

CCCCVII.

Si on vouloit intégrer par les methodes ordinaires l'equation precedente $y^2dx^2 - 2xydxdy + x^2dy^2 =$

$a^2dx^2+a^2dy^2$, ou $dy^2=\frac{-2xydxdy-aadx^2+y^2dx^2}{aa-xx}$, on auroit en multipliant le numerateur & le denominateur par $aa-xx$, & en tirant la racine quarrée $dy=\frac{-xydx+adx\sqrt{xx+yy-aa}}{aa-xx}$, comme il eſt aiſé de s'en aſsûrer en quarrant de nouveau, & en ſubſtituant pour $aadx^2$, & pour $aadx^2+aady^2$ leurs valeurs reſpectives que donnent les equations precedentes; car on aura alors une expreſſion identique: donc l'equation propoſée deviendra $aady-xxdy+xydx=adx\times\sqrt{xx+yy-aa}$, dont il faut maintenant chercher l'intégrale. Soit pour cela $y=u\sqrt{aa-xx}$; on aura $\sqrt{xx+yy-aa}=\sqrt{(aa-xx)(uu-1)}$, & $dy=du\sqrt{aa-xx}-\frac{uxdx}{\sqrt{aa-xx}}$; d'où l'on tire $aady-xxdy+xydx=du(aa-xx)^{\frac{3}{2}}=adx\sqrt{aa-xx}.\sqrt{uu-1}$, ou $\frac{du}{\sqrt{uu-1}}=\frac{adx}{aa-xx}$, equation dans laquelle les variables x & u ſont ſeparées.

Nous obſerverons maintenant que, reſoudre une equation ſoit différentielle, ſoit intégrale, n'eſt autre choſe que de trouver une valeur de x en y, ou de y en x, qui etant ſubſtituée dans cette equation donne $o=o$.

$o = o$. Or si on fait dans la transformée $\sqrt{uu-1} = o$, ou $uu = 1$, on voit que cette condition satisfait a l'equation, puisque le membre $adx\sqrt{aa-xx}.\sqrt{uu-1}$ s'evanoüit en même tems que $du(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$, a cause de $uu=1$, & par consequent $du=o$. Donc en substituant $u=\pm 1$, on aura $y=\pm\sqrt{aa-xx}$, ou $xx+yy=aa$, comme cy-dessus.

Si on vouloit intégrer l'equation $\frac{du}{\sqrt{uu-1}} = \frac{adx}{aa-xx}$ par le moyen des logarithmes, on auroit $L.(u+\sqrt{uu-1}) = \frac{1}{2} L.\, n^2\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$, & $u+\sqrt{uu-1} = n \times \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$; n etant une constante arbitraire; d'où l'on tire $u = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$; & par consequent $y = u\sqrt{aa-xx} = \frac{n}{2}(a+x) + \frac{1}{2n}(a-x)$, equation différente de la premiere. Enfin on trouveroit encore un autre resultat, en considerant la transformée $xdz + \frac{azdz}{\sqrt{1+zz}} = o$; il est clair que, cette equation etant multipliée par dz, on pourra regarder dz comme zero, c'est a dire, z comme constante que nous nommerons

n; d'où l'on tire immediatement $zx + a\sqrt{1+zz} = nx + a\sqrt{1+nn} = y$.

On voit aiſément qu'on intégreroit de la même façon toutes les equations de cette forme $ydx - xdy = a\sqrt[n]{\alpha dx^n + \beta dx^{n-\nu} dy^\nu + \gamma dx^{n-\mu} dy^\mu + \&c.}$; car ſuppoſant $dy = zdx$, on auroit $y = zx + a\sqrt[n]{\alpha + \beta z^\nu + \gamma z^\mu + \&c.}$, & différentiant de nouveau, & diviſant par dz, on trouvera $x = \frac{-\nu a\beta z^{\nu-1} - \mu a\gamma z^{\mu-1}}{n\sqrt[n]{(\alpha+\beta z^\nu+\gamma z^\mu+\&c.)^{n-1}}}$, & $y = \frac{na\alpha + (n-\nu)a\beta z^\nu + (n-\mu)a\gamma z^\mu + \&c.}{n\sqrt[n]{(\alpha+\beta z^\nu+\gamma z^\mu+\&c.)^{n-1}}}$, d'où on tirera, en chaſſant z, une equation algebrique entre x & y. Or, puiſqu'on a auſſi $dz = o$, & $z = m$ conſtante, on aura $y = mx + a\sqrt[n]{\alpha + \beta m^\nu + \gamma m^\mu + \&c.}$

CCCCVIII.

Ces différentes manieres de conſiderer les différentielles précedentes, d'où naiſſent différentes intégrales, donnent lieu a un cas bien ſingulier, & a une eſpece de paradoxe dans le Calcul Intégral.+ On s'imagine communément qu'ayant une equation différentielle quelconque, on n'a qu'a chercher ſon intégrale, & ajouter

+ M. Clairaut a fait le premier cette remarque et c'est à peu près de la maniere suivante que M. de la Grange dans les Mém. de Berlin pour l'année 1774 a expliquée cette espece de paradoxe. L'integrale d'un equation differentielle du premier ordre entre deux variables contient une constante arbitraire. Si on regarde les variables comme les coordonnées rectangles d'une ligne courbe rapportées a des axes determinés, il est clair qu'on pourra imaginer decrites autant de courbes differentes, toutes integrales particulieres de la proposée, qu'on peut donner de valeurs differentes a la constante. Or s'il arrive que ces courbes ajent une tangente commune, l'equation de cette tangente commune droite ou courbe

une constante a cette intégrale, pour avoir la plus grande generalité possible, & on ne doute pas alors d'avoir une intégrale qui satisfasse a toutes les solutions possibles. Nous venons cependant de demontrer qu'on peut trouver une valeur de x en y, qui n'est pas contenuë dans l'equation intégrée, quoiqu'elle donne une resolution de l'equation différentielle. Ainsi dans l'exemple $aady - xxdy + xydx = adx\sqrt{xx + yy - aa}$, où les variables sont mêlées, nous avons fait voir que par la substitution de $y = u\sqrt{aa - xx}$, on a la separée $\frac{du}{\sqrt{uu - 1}} = \frac{adx}{aa - xx}$, dont l'intégrale prise dans toute son etenduë seroit $u + \sqrt{uu - 1} = n\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}$; d'où nous avons tiré l'equation $y = \frac{n}{2}(a + x) + \frac{1}{2n}(a - x)$. Or il est evident que cette intégrale, quelque generale qu'elle soit a cause de la constante indefinie, ne renferme pas l'equation $yy + xx = aa$, qui satisfait cependant a la différentielle proposée.

On peut ramener toutes les equations différentielles, qui sont dans ce cas de singularité, c'est a dire, qui echappent a l'intégration ordinaire, a la forme generale $Vdz = Z(Pdx + Qdy)$, dans laquelle z est une fonction quelconque des deux variables x & y, & Z une fonction quelconque de z; V, P, & Q etant

doit satisfaire a l'equation differentielle, puisque un element quelconque de cette tangente commune se confond avec un element des courbes integrales particuliere mais cette tangente n'est aucune de ces courbes et par consequent elle n'est point comprise dans l'integrale complete. Aussi par exemple l'equation $y = \frac{2xdy}{dx} - \frac{ydy^2}{dx^2}$, qui a pour son integrale complete $y^2 = 4m(x - m)$ satisfait a une infinité des paraboles ayant pour directrice commune l'axe des y, et leurs sommets sur la ligne des x, mais si on tire par l'origine des coordonnées une droite sous un angle de 45°, elle les touchera toutes, et l'equation de cette droite qui est evidemment $x = y$, satisfait a l'equation differentielle $y = \frac{2xdy}{dx} - \frac{ydy^2}{dx^2}$, et n'est pas comprise dans son integrale complete.

aussi des fonctions quelconques des variables x & y. Car il est evident qu'en faisant $Z = o$, cette supposition satisfait a la question, puisque de là on tire z egale a une constante, & par consequent $dz = o$; ce qui fait evanoüir les deux membres de l'equation, comme il le faut. Ou bien, ce qui revient au même, ces sortes d'equations singulieres sont renfermées dans la forme $\frac{d.\varphi xy}{\boxed{\varphi xy}} = d.\theta xy$, dans laquelle θxy est une fonction quelconque de x & de y; φxy une autre, & $\boxed{\varphi xy}$ designe une autre fonction de la fonction φxy, mais telle que, φxy etant egale a zero, $\boxed{\varphi xy}$ le soit aussi. Toutes les equations renfermées dans cette forme auront la singularité, dont nous traitons. Car on voit aisément les deux solutions que donne cette equation differentielle; l'une est $C + \theta xy = S. \frac{d.\varphi xy}{\boxed{\varphi xy}}$, que l'on trouvera en intégrant, & l'autre est $\boxed{\varphi xy} = o$, que l'on a sans intégration, ce qui peut servir a expliquer ce paradoxe; car on voit par là qu'il ne se trouve que dans des Problemes, qui n'avoient pas besoin d'intégration pour être resolus. Cette reflexion pourroit s'eclaircir par des Problemes de Geometrie; mais ces discussions n'entrent pas dans le plan de nôtre Ouvrage: il nous suffit d'avoir fait voir que ce Cas ne peut

faire une exception a la regle generale du Calcul Intégral.

C'eſt par cette même raiſon qu'il arrive quelque fois qu'une equation différentielle n'eſt pas intégrable, ny même ſeparable, dont on peut trouver neantmoins la reſolution par une equation finie, qui ſatisfait a la queſtion. Ainſi l'equation différentielle $aa(aa-xx)dy + aaxydx = (aa-xx)(ydx-xdy)\sqrt{xx+yy-aa}$, qui ſe reduit a la forme generale precedente, & dont on tenteroit en vain, l'intégration, eſt cependant reſoluble par la ſuppoſition de $yy+xx=aa$. Car ſuppoſant $yy+xx-aa=o$, les deux membres de l'equation s'evanoüiſſent. Puiſque le ſecond membre de l'equation $(aa-xx)(ydx-xdy)\sqrt{xx+yy-aa}$ eſt multiplié tout entier par $\sqrt{yy+xx-aa}=o$, il eſt evident que ce membre eſt $=o$. De plus $yy+xx=aa$ & par conſequent $2ydy+2xdx$, ou $ydy+xdx=o$; mais le premier membre, a cauſe de $aa-xx=y^2$, devient $aay^2dy+aayxdx=aay(ydy+xdx)$; donc il eſt $=o$. On le verroit plus clairement, en ſuppoſant $y=z\sqrt{aa-xx}$; car alors l'equation prendra la forme $aadz=(ydx-xdy)\sqrt{zz-1}$, & faiſant $Z=\sqrt{zz-1}$, ou aura $\sqrt{zz-1}=o$, ou $z=1$, & par conſequent $yy+xx=aa$.

CCCCIX.

LEMME. Si on multiplie, ou si on divise une différentielle quelconque par une fonction de son intégrale, le produit ou le quotient sera une différentielle, qu'on pourra toujours intégrer par la premiere Partie du Calcul Intégral.

DEMONSTRATION. Soit dx une différentielle quelconque dont l'intégrale est x, & X une fonction de x; il est evident que le produit Xdx & le quotient $\frac{dx}{X}$ seront des différentielles a une seule variable x. On pourra donc les intégrer l'une & l'autre par les methodes de la premiere Partie, & l'intégrale du produit, $S.Xdx$ sera egale a l'aire d'une courbe dont l'abscisse sera x, & l'ordonnée perpendiculaire X; l'intégrale du quotient, $S.\frac{dx}{X}$ sera egale a l'aire d'une autre courbe, qui aura x pour abscisse, & $\frac{1}{X}$ pour ordonnée perpendiculaire. *C. Q. F. D.*

CCCCX.

COROLLAIRE. Supposé qu'une equation différentielle soit composée de deux membres, dont l'un soit intégrable, & que F represente une fonction quelconque de son intégrale, & que l'autre membre soit le

produit Qdy d'une différentielle exacte dy par une quantité quelconque Q; si, en multipliant toute cette equation différentielle par la fonction F de l'intégrale de son premier membre, on trouve dans le second membre multiplié par cette même fonction, ou dans $FQdy$, que le produit FQ est une fonction quelconque de l'intégrale y de la différentielle exacte dy; toute l'equation ainsi multipliée sera intégrable par les methodes de la premiere Partie. Cela est evident par le Lemme, puisque, par cette multiplication, le premier membre de l'equation deviendra le produit d'une différentielle par une fonction de son intégrale, & que le second membre deviendra aussi le produit d'une autre différentielle par une fonction de son intégrale.

Pour rendre plus clair ce Corollaire important soit une equation différentielle $ydx = o$. En ajoutant de côté & d'autre xdy, on aura $ydx + xdy = xdy$; l'intégrale du premier membre $ydx + xdy$ de cette equation est xy; le second membre xdy est le produit de la différentielle exacte dy par la quantité x. Supposons premierement que F soit une fonction quelconque de l'intégrale xy du premier membre; en multipliant toute l'equation $ydx + xdy = xdy$ par F, on aura $F(ydx + xdy) = Fxdy$; le premier membre $F.d(xy)$ sera intégrable par le Lemme precedente, & le second membre $Fxdy$ le sera aussi, lorsque le produit Fx sera une fonction de y.

CCCCXI.

On se sert avantageusement du Corollaire precedent pour trouver quelques formules d'equations intégrables par le moyen de l'equation $z = \frac{dx}{dy}$, ou $dx - zdy = o$. On met pour cela cette equation sous la forme suivante $dx - zdy - ydz + ydz = o$. Ensuite on la multiplie par une fonction X de x, & on y ajoute $zydX - zydX$, ce qui ne la change pas. On a par là l'equation $Xdx - Xzdy - Xydz - zydX + yXdz + zydX = o$, ou bien $Xdx - Xzdy - Xydz - zydX = - yXdz - zydX$. Or le premier membre de cette equation est intégrable, & son intégrale est, comme on le voit en prenant la différentielle, $S.Xdx - yzX$. Le second membre est la différentielle de $-zX$ multipliée par y. Donc, en multipliant toute l'equation par une fonction $\varphi(S.Xdx - Xyz)$ de l'intégrale $S.Xdx - Xyz$ de son premier membre, on aura pour produit l'equation $\varphi(S.Xdx - Xyz)\{Xdx - d.(Xyz)\} = - d.(zX) \times y\varphi(S.Xdx - Xyz)$, qui sera intégrable, lorsque $y \times \varphi(S.Xdx - Xyz)$ sera une fonction de zX (Art. CCCCX.).

CCCCXII.

THEOREME VI. L'equation $Xdx - d.(Xyz) = - y.d.(Xz)$ est intégrable, lorsque l'intégrale du premier

premier membre $S. X dx - Xyz$ eſt egale a une fonction du produit de y multiplié par une fonction de Xz.

DEMONSTRATION. Soit $\varphi'(Xz)$ une fonction de Xz; $\varphi''\{y\varphi'(Xz)\}$ une fonction du produit $y \times \varphi'(Xz)$. On a, par la ſuppoſition, $S. X dx - Xyz = \varphi''\{y.\varphi'(Xz)\}$. En conſiderant $y.\varphi'(Xz)$, comme une ſeule inconnuë u, & le membre $S. X dx - Xyz$, comme une autre inconnuë t, on aura $t = \varphi''(u)$; d'où il ſuit, par la nature des equations, que u ſera egale a quelque fonction de t, que nous deſignerons par $\varphi(t)$, ou par $\varphi(S. X dx - Xyz)$; on aura donc $\varphi(S. X dx - Xyz) = y.\varphi'(Xz)$; & puiſque $X dx - d.(Xyz) = -y.d.(Xz)$, en diviſant de côté & d'autre par des quantités egales, on aura $\frac{X dx - d.(Xyz)}{\varphi(S. X dx - Xyz)} = \frac{-y.d.(Xz)}{y.\varphi(Xz)} = \frac{-d.(Xz)}{\varphi'(Xz)}$, equation, dont chaque membre eſt une différentielle diviſée par une fonction de ſon intégrale; donc cette equation, & par conſequent la propoſée ſeront intégrables (Lemme Article CCCCIX.). *C. Q. F. D.*

CCCCXIII.

COROLLAIRE. L'equation $X dx - d.(Xyz) = -y.d.(Xz)$ eſt intégrable, lorſqu'on a cette autre equation $S. X dx = ayXz + byX^n z^n$; a, b, n etant

constantes. Car cette derniere equation, en ôtant yXz de part & d'autre, devient $S.Xdx - yXz = ayXz - yXz + byX^n z^n = y\{aXz - Xz + b(Xz)^n\} = y.\varphi'(Xz)$. On aura donc $\frac{Xdx - d.(Xyz)}{S.Xdx - Xyz} = \frac{-y.d.(Xz)}{y.\varphi'(Xz)} = \frac{-d.(Xz)}{\varphi'(Xz)}$, &, en intégrant de part & d'autre, $L.(S.Xdx - Xyz) = S.\frac{-d(Xz)}{\varphi'(Xz)} + C$. constante.

EXEMPLE. Supposé que dans les deux equations du Corollaire on ait $a=1$, $b=2$, $n=1$, $X=x^{\frac{1}{2}}$, ou que ces deux equations soient $x^{\frac{1}{2}}dx - d.(yx^{\frac{1}{2}}z) = -y.d.(yx^{\frac{1}{2}}z)$, & $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = yx^{\frac{1}{2}}z + 2yx^{\frac{1}{2}}z = 3yx^{\frac{1}{2}}z$, on aura pour intégrales $L.\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - yx^{\frac{1}{2}}z\right) = S.\frac{-d.\left(x^{\frac{1}{2}}z\right)}{2x^{\frac{1}{2}}z} + C. = -\frac{1}{2}L.\left(x^{\frac{1}{2}}z\right) + L.q$, en mettant $L.q$ pour la constante C. Or $\frac{1}{2}L.\left(x^{\frac{1}{2}}z\right) = L.\left(x^{\frac{1}{2}}z\right)^{\frac{1}{2}}$, & $L.q - L.\left(x^{\frac{1}{2}}z\right)^{\frac{1}{2}} = L.\frac{q}{\left(x^{\frac{1}{2}}z\right)^{\frac{1}{2}}}$; donc $L.\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - yx^{\frac{1}{2}}z\right) =$

$L.\frac{q}{(x^{\frac{1}{2}}z)^{\frac{1}{2}}}$, & en repaſſant des logarithmes aux nombres, $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-yx^{\frac{1}{2}}z=\frac{q}{(x^{\frac{1}{2}}z)^{\frac{1}{2}}}=\frac{q}{x^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{2}}}$; par conſequent $\frac{2}{3}x^{\frac{7}{4}}z^{\frac{1}{2}}-yx^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{2}}=q$. Si on ſubſtitue dans cette equation la valeur de $z=\frac{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}{3yx^{\frac{1}{2}}}=\frac{2x}{9y}$, qu'on tire de l'equation $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=3yx^{\frac{1}{2}}z$, on aura $\frac{2}{3}x^{\frac{7}{4}}.\sqrt{\frac{2x}{9y}}-yx^{\frac{3}{4}}.\sqrt{\frac{8x^3}{9^3y^3}}=q$, equation ſans z, ou ſans $\frac{dx}{dy}$, & par laquelle on peut trouver la valeur de x en y, & celle de y en x.

CCCCXIV.

THEOREME VII. Si on a l'equation $x+Z+a=\frac{yyzdz}{2dZ}+\frac{zdZ}{2dz}$, dans laquelle a eſt une conſtante, Z une fonction de z, & $z=\frac{dx}{dy}$, ou $dx-zdy=0$, on

aura auſſi l'equation ſuivante $(x - yz + Z + a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.S.\frac{-dz}{\sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}}$.

DEMONSTRATION. L'equation propoſée, en ôtant yz de part & d'autre, devient $x - yz + Z + a = \frac{yyzdz}{2dZ} + \frac{zdZ}{2dz} - yz = \frac{zdz}{2dZ}\left(y - \frac{dZ}{dz}\right)^2$, comme on le voit clairement, en faiſant le quarré de $\left(y - \frac{dZ}{dz}\right)$, qui eſt $yy - \frac{2ydZ}{dz} + \frac{dZ^2}{dz^2}$, & le multipliant par $\frac{zdZ}{2dZ}$; car le produit eſt $\frac{yyzdz}{2dZ} - yz + \frac{zdZ}{2dz}$. Donc en prenant la racine quarrée des deux membres de l'equation, on aura $(x - yz + Z + a)^{\frac{1}{2}} = \left(y - \frac{dZ}{dz}\right) \times \sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}$. Mais, par l'hypoteſe, $dx - zdy = o$; par conſequent $dx - zdy - ydz + dZ = -ydz + dZ$, donc $\frac{dx - zdy - ydz + dZ}{(x - yz + Z + a)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-ydz + dZ}{\left(y - \frac{dZ}{dz}\right)\sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}} = \frac{-dz\left(y - \frac{dZ}{dz}\right)}{\left(y - \frac{dZ}{dz}\right)\sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}} = \frac{-dz}{\sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}}$; & par ce que $dx - zdy - ydz + dZ$ eſt la différentielle de $(x - yz + Z + a)$;

en intégrant chaque membre de cette derniere equation, on aura $(x - yz + Z + a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} S. \frac{-dz}{\sqrt{\frac{ddz}{ddZ}}}$. *C. Q. F. D.*

CCCCXV.

THEOREME VIII. L'equation $dx - zdy = o$ eſt intégrable, lorſqu'on a l'equation $x - yz + Z + a = \varphi\left\{Z'\left(y - \frac{dZ}{dz}\right)\right\}$, dans laquelle Z & Z' ſont des fonctions de z, & $\varphi\left\{Z'\left(y - \frac{dZ}{dz}\right)\right\}$ une fonction du produit $Z' \times \left(y - \frac{dZ}{dz}\right)$.

DEMONSTRATION. Puiſque $x - yz + Z + a = \varphi\left\{Z'\left(y - \frac{dZ}{dz}\right)\right\}$, on aura $\varphi'(x - yz + Z + a) = Z' \times \left(y - \frac{dZ}{dz}\right)$, & parce que l'equation $dx - zdy = o$ ſe reduit a celle-cy $dx - zdy - ydz + dZ = -ydz + dZ$, on aura $\frac{dx - zdy - ydz + dZ}{\varphi'(x - yz + Z + a)} = \frac{-(ydz - dZ)}{\varphi'(x - yz + Z + a)} = \frac{-dz\left(y - \frac{dZ}{dz}\right)}{Z'\left(y - \frac{dZ}{dz}\right)} = \frac{-dz}{Z'}$. Et puiſque les deux membres de cette equation ſont deux différentielles diviſées chacune par une fonction de leur intégrale, ces deux membres ſont intégrables (par le Lemme Art. CCCCIX.). *C. Q. F. D.*

CCCCXVI.

Nous allons expliquer dans les Problemes ſuivants une methode generale pour intégrer un nombre quelconque N d'equations, renfermant le nombre $N+1$ de variables t, x, y, z, u, &c., chaque equation etant de la forme $a\,dx + b\,dy + c\,dz + \&c. + (bx + ky + lz + \&c.)T\,dt + \theta\,dt = 0$, dans laquelle a, b, c, &c., b, k, l, &c. ſont des conſtantes quelconques, ou zero, T une fonction de t, la même dans toutes les equations, & θ une fonction de t, qui peut être différente dans les différentes equations, ou zero. Pour intégrer ces equations, on les multiplie toutes, excepté une que nous ſuppoſerons toujours être la premiere, par différents facteurs conſtans, mais indeterminés. Enſuite on ajoute toutes les equations ainſi multipliées a la premiere, on a celle qui reſulte de cette ſomme; on determine les valeurs des facteurs ou coefficients conſtants, de telle ſorte que cette equation ſe reduiſe a la forme de l'Article CCCLXXXII., ou a une autre, dont les variables puiſſent ſe ſeparer. Nous avons deja traité deux equations de cette forme dans l'Art. CCCXLVII., mais nous devons expliquer icy plus au long ce que nous avons dit briévement dans l'endroit cité.

CCCCXVII.

Probleme V. Trouver les intégrales des deux equations $dx+(ax+by)dt=o, dy+(bx+ky)dt=o$.

Solution. On multiplie d'abord la seconde de ces equations par un facteur constant & indeterminé A; elle devient $Ady+(bx+ky)Adt=o$. On ajoute cette equation a la premiere, ce qui donne la somme $dx+Ady+\{(a+bA)x+(b+kA)y\}dt=o$. Ensuite on fait ensorte, que dans cette equation la quantité qui est multipliée par dt devienne un multiple de $x+Ay$, intégrale de la différentielle $dx+Ady$, afin qu'ayant supposé $x+Ay=u$, &, M etant une constante indeterminée, l'equation prenne la forme $du+Mudt=o$, ou $\frac{du}{u}+Mdt=o$, dans laquelle les variables u & t sont separées. On aura donc par cette hypothese $ax+bAx+by+kAy=Mx+MAy$; & en comparant terme a terme les deux membres de cette equation, $ax+bAx=Mx$, & $by+kAy=MAy$; d'où l'on tire $M=a+bA$, &, $M=\frac{b+kA}{A}$; par consequent $a+bA=\frac{b+kA}{A}$, &, par les regles connües de l'Algebre, $bAA+aA-kA=b$, & $A=-\left(\frac{a-k}{2b}\right)\pm$

$\frac{\sqrt{(a-k)^2+4bh^2}}{2b}$. On a donc par là deux valeurs de A; & ſuppoſant $x+Ay=u$, ou $dx+Ady=du$, puiſque $M=a+bA$, on aura $du+(a+bA)udt=o$, ou $\frac{du}{u}+(a+bA)\,dt=o$, & $\frac{du}{u}=-dt\,(a+bA)$; &, en intégrant, $L.u=C-t\,(a+bA)$, C etant une conſtante. Donc en prenant e pour le nombre, dont le logarithme eſt l'unité, ou en ſuppoſant $L.e=1$, & $L.g=C$, on aura $L.u=L.g-t\,(a+bA)\,L.e=L.g+L.e^{-t\,(a+bA)}=L.g\,e^{-t\,(a+bA)}$, & par conſequent $u=g\,e^{-t\,(a+bA)}$, cela poſé, ſoient p, p' les deux valeurs de A trouvées cy-deſſus; & au lieu de l'equation $x+Ay=u$, on aura ces deux-cy $x+py=u$, & $x+p'y=u'$; & de même au lieu de l'equation $u=g\,e^{-t\,(a+bA)}$, on aura les deux ſuivantes $u=g\,e^{-t\,(a+bp)}$, & $u=g'e^{-t\,(a+bp')}$. Des deux equations $x+py=u$, & $x+p'y=u'$ on tire aiſément les valeurs de y & de x; car en retranchant la ſeconde equation de la premiere, on a $py-p'y=u-u'$, & $y=\frac{u-u'}{p-p'}$; & par la premiere equation on trouve $x=u-py=u-\left(\frac{pu-pu'}{p-p'}\right)=\frac{p'u-pu'}{p'-p}$. Dans ces valeurs de x & de y, on mettra pour u & pour u' leurs

leurs valeurs $ge^{-t(a+bp)}$, & $g'e^{-t(a+bp')}$, & on determinera les conſtantes g & g' par les valeurs que x & y doivent avoir, lorſque $t=o$, où eſt egale a quelque grandeur connue, & on aura les intégrales cherchées.

Cette Solution ne peut ſouffrir de dificultés, que dans le cas où l'equation $bAA+aA-kA-b=o$ ne donne point deux valeurs de A, ce qui arrivera ſi $b=o$, ou $b=o$, & dans le cas où les deux valeurs de A ſont egales. Or 1.° Si $b=o$, une des valeurs de A eſt $=o$, & l'autre eſt $\frac{k-a}{b}$; c'eſt pourquoi il n'y a qu'a ſuppoſer dans les formules precedentes $p'=o$, & l'on aura les valeurs de y & de x. 2.° Si $b=o$, la ſeconde equation $dy+(bx+ky)dt=o$ ſera $dy+kydt=o$, ou $\frac{dy}{y}=-kdt$, d'où l'on tire $y=me^{-kt}$, m etant une conſtante, & par conſequent y ſera une fonction de t, que nous deſignerons par θ; & en ſubſtituant cette valeur de y dans la premiere equation $dx+axdt+bydt=o$, elle devient $dx+axdt+b\theta dt=o$, equation qui ſe reduit a la formule de l'Art. CCCLXXXII., & qu'on intégre par cet Article. 3.° Si les deux valeurs de A, p & p' ſont egales, on aura toujours $u=ge^{-t(a+bp)}$, en mettant p pour A; ſubſtituant enſuite cette valeur de u dans l'equation

$x + py = u$, on aura $x = ge^{-t(a+bp)} - py$. On mettra cette valeur de x dans la feconde equation $dy + bxdt + kydt = o$, & elle deviendra $dy + kydt + bge^{-t(a+bp)}dt - bpydt = o$, ou $dy + (k - bp)ydt + bge^{-t(a+bp)}dt = o$, equation qui fe reduit encore a la formule de l'Art. CCCLXXXII. 4.° Enfin fi les valeurs de A etoient imaginaires, le Probleme fe refoudroit toujours de la même maniere. Car nous avons vû (Art. XCVIII.) que les exponentielles imaginaires fe reduifent toujours $aA + B\sqrt{-1}$, $A - B \times \sqrt{-1}$, A & B etant des quantités réelles; & fi les valeurs de x & de y devoient être réelles, les imaginaires en difparoitroient.

CCCCXVIII.

PROBLEME VI. Trouver les intégrales des deux equations $dx + (ax + by)Tdt + \theta dt = o$, $dy + (bx + ky)Tdt + \theta' dt = o$, dans lefquelles T eft une fonction de t, & θ, θ' auffi des fonctions quelconques de t, ou zero.

SOLUTION. Elle eft a peu prés la même que celle du Probleme precedent. Car en multipliant la feconde equation par A, & ajoutant le produit a la premiere equation, on aura $dx + Ady + \{(a + bA)x$

$+(b+kA)y\}Tdt+(\theta+\theta'A)dt=0$. Ensuite si on fait $dx+Ady=du$, ou $x+Ay=u$, & $(a+bA)x+(b+kA)y=Mx+MAy$, on trouvera, comme dans le Probleme precedent, $M=a+bA=\frac{b+kA}{A}$; $A=-(\frac{a-k}{2b})\pm\frac{\sqrt{(a-k)^2+4bb^2}}{2b}$, & $du+(a+bA)\times uTdt+(\theta+\theta'A)dt=0$, equation qu'on intégrera par la methode de l'Art. CCCLXXXII. Supposé presentement que les deux valeurs de A soient p, & p', on trouvera encore, comme dans le Probleme precedent, $y=\frac{u-u'}{p-p'}$, & $x=\frac{p'u-pu'}{p'-p}$, & dans ces deux valeurs de y & de x on mettra pour u & pour u' leurs valeurs trouvées par l'Art. CCCLXXXII. *C. Q. F. T.*

CCCCXIX.

COROLLAIRE. Il ne sera pas plus difficile d'intégrer les deux equations $dx+mdy+(ax+by)Tdt+\theta dt=0$; $dy+ndx+(bx+ky)Tdt+\theta'dt=0$. On multipliera la seconde equation par A, & ayant ajouté ce produit a la premiere equation, on aura $(1+nA)dx+(m+A)dy+(a+bA)xTdt+(b+kA)yTdt+(\theta+A\theta')dt=0$. On fera ensuite $(1+nA)x+(m+A)y=u$, & $(a+bA)x+(b+kA)y=M(1+nA)x+M(m+A)y$; d'où l'on tirera M

$= \frac{a+bA}{1+nA}$; $M = \frac{b+kA}{m+A}$; $\frac{a+bA}{1+nA} = \frac{b+kA}{m+A}$, & $du + MuT\,dt + (\theta + A\zeta')\,dt = o$. On fera le reste comme dans le Probleme precedent, en se servant de l'equation $(1+nA)x + (m+A)y = u$, au lieu de $x + ay = u$, & ayant egard aux différentes valeurs de A & de M.

On voit bien encore que, si dans les equations proposées, les deux premiers termes dx & dy etoient multipliés par des constantes quelconques, la solution n'en seroit pas plus difficile; & d'ailleurs il est evident qu'en divisant chaque equation par la constante qui multiplie son premier terme, on la reduiroit a la forme proposée dans ce Corollaire.

CCCCXX.

PROBLEME VII. Intégrer les trois equations $dx + (ax + by + cz)\,dt = o$; $dy + (bx + ky + lz)\,dt = o$; $dz + (mx + ny + pz)\,dt = o$.

SOLUTION. En multipliant la seconde de ces equations par une constante indeterminée A, & la troisieme par une constante indeterminée B, les trois equations seront alors $dx + (ax + by + cz)\,dt = o$; $Ady + (Abx + Aky + Alz)\,dt = o$; $Bdz + (Bmx + Bny + Bpz)\,dt = o$. On les ajoutera ensemble, la somme sera $dx + Ady + Bdz + \{(a + Ab + Bm)x$

$+(b+Ak+Bn)y+(c+Al+Bp)z\} dt=o$. Ensuite on ſuppoſera $dx+Ady+Bdz=du$, ou, en intégrant, $x+Ay+Bz=u$, & $(a+Ab+Bm)x+(b+Ak+Bn)y+(c+Al+Bp)z=M(x+Ay+Bz)=Mu=Mx+MAy+MBz$; afin d'avoir l'equation $du+Mudt=o$, ou $\frac{du}{u}=-Mdt$, dans laquelle les variables u & t ſont ſeparées, & dont l'intégrale eſt $L.u=-Mt+C$ conſtante, ou $u=ge^{-Mt}$. Puis on comparera terme a terme les deux membres de l'equation $(a+Ab+Bm)x+(b+Ak+Bn)y+(c+Al+Bp)z=Mx+MAy+MBz$, en egalant entr'eux les termes homologues, & on aura les trois equations ſuivantes, $M=a+Ab+Bm$; $MA=b+Ak+Bn$; $MB=c+Al+Bp$; d'où l'on tire les deux equations $a+Ab+Bm=\frac{b+Ak+Bn}{A}=\frac{c+Al+Bp}{B}$. La premiere de ces deux equations $a+Ab+Bm=\frac{b+Ak+Bn}{A}$ donne $B=\frac{bAA+Aa-Ak-b}{n-m}$, & ſubſtituant cette valeur de B dans la ſeconde equation $a+Ab+Bm=\frac{c+Al+Bp}{B}$, on aura, après avoir fait les reductions ordinaires, une equation du troiſieme degré, qui donnera trois valeurs de A.

Cela posé, soient p, p', p'' les trois valeurs de A; q, q', q'' les trois valeurs correspondantes de B, & r, r', r'' les trois valeurs correspondantes de M; au lieu de l'equation $u = g e^{-Mt}$, on aura ces trois autres equations $u = g e^{-rt}$; $u' = g' e^{-r't}$; $u'' = g'' e^{-r''t}$, & au lieu de l'equation $x + Ay + Bz = u$, ou aura les trois equations suivantes $x + py + qz = g e^{-rt}$; $x + p'y + q'z = g' e^{-r't}$; $x + p''y + q''z = g'' e^{-r''t}$. De ces trois equations on tirera les valeurs de x, y, z, & on determinera les constantes g, g', g'' par les valeurs que doivent avoir x, y, z, lorsque $t = o$, ou est egal a une constante donnée. *C. Q. F. T.*

CCCCXXI.

REMARQUE. Si l'equation en A n'a pas trois racines inégales, comme nous l'avons supposé, on pourra toujours, pourvû que cette equation ait au moins une racine, reduire le Probleme present au cas du Corollaire du Probleme VI. Car soit p la valeur de A, q la valeur de B, & r la valeur de M, au lieu de l'equation $x + Ay + Bz = u = L.g e^{-Mt}$, on aura $x + py + qz = L.e^{-rt}$; & l'on reduira les trois equations données a deux, en faisant evanoüir par le moyen de cette derniere equation une des variables, par

exemple, *z*. Mais il peut ſe faire que l'equation en *A* n'ait aucune racine, ce qui arrivera, ſi les coefficients qui affectent les différentes puiſſances de *A*, ſont egaux a zero. En ce cas, ſi le terme tout connû de l'equation s'evanoüit auſſi, c'eſt une marque, qu'on peut donner a *A* telles valeurs qu'on voudra, & le Probleme devient alors plus ſimple. Si le terme tout connû de l'equation ne s'evanoüit pas, on augmentera, ou on diminuera a volonté un des coefficiens *a*, *b*, *c*, *h*, &c. d'une quantité infiniment petite, pour retablir un des termes de l'equation, & on aura pour lors par la regle du Parallelogramme de Newton, une valeur infinie de *A*, qui ſervira a reſoudre le Probleme. Mais ce n'eſt pas icy le lieu de demontrer cette derniere reflexion, qui demanderoit une trop longue explication, laquelle d'ailleurs appartient a l'Algebre finie.

Il eſt facile d'intégrer par le Probleme trois equations qui contiendront les variables *x*, *y*, *z* multipliées par des conſtantes, & par une fonction quelconque de *t*, avec leurs différences auſſi multipliées par des conſtantes, & par une même fonction de *t*, & de plus un terme quelconque θdt, $\theta' dt$, $\theta'' dt$, qui ne renferme que des conſtantes avec *t*. On n'aura pour cela, qu'a operer comme dans le Probleme VI., & dans ſon Corollaire; enfin on voit aſſez, par tout ce que nous avons dit, comment il faudroit proceder pour intégrer

quatre, cinq, &c., & autant d'equations qu'on voudra, pourvû qu'elles ayent la forme préscritte dans l'Article premier de cette methode. Au reste on rend l'ingenieuse methode, que nous venons d'expliquer, beaucoup plus generale, en se servant de facteurs variables, & indeterminés, & de la propriété des equations, qu'on suppose être des différentielles exactes. Car si l'on avoit en general un nombre quelconque N d'equations différentielles renfermant le nombre $N+1$ de variables combinées entr'elles de quelque façon que ce soit; en multipliant toutes ces equations, excepté la premiere, respectivement par des quantités M, M', M'', &c. que l'on supposeroit être des fonctions indeterminées de ces variables, on ajouteroit ces produits a la premiere equation; puis multipliant le tout par un facteur P, que l'on supposera aussi être une fonction de ces variables, on supposeroit de plus que l'equation totale est une différentielle complette, & on deduiroit les equations particulieres qui naîssent de cette substitution. Nous avons deja donné un Exemple de cette methode (Art. CCCXLVII.); nous en joindrons icy un autre.

Si l'on avoit les deux equations $Adx+Bdy+Cdz=0$; $A'dx+B'dy+C'dz=0$, dans lesquelles A, B, C, A', B', C' sont des quantités qui ne renferment que des constantes, & les trois variables x, y, z combinées comme on voudra; on multiplieroit la seconde

conde equation par M, on ajouteroit le produit a la premiere, & multipliant le tout par P, on auroit $P(A+A'M)dx+P(B+B'M)dy+P(C+C'M)dz=o$; or, pour que celle-cy soit une différentielle complette, il faut (Art. CCCXXXII.) qu'on ait les trois equations suivantes $\frac{d.(P(A+A'M))}{dy}=\frac{d.(P(B+B'M))}{dx}$; $\frac{d.(P(A+A'M))}{dz}=\frac{d.(P(C+C'M))}{dx}$; $\frac{d.(P(B+B'M))}{dz}=\frac{d.(P(C+C'M))}{dy}$. C'est a dire $\frac{dP}{dy}(A+A'M)+P.\frac{d.(A+A'M)}{dy}=\frac{dP}{dx}(B+B'M)+P.\frac{d.(B+B'M)}{dx}$; $\frac{dP}{dz}(A+A'M)+P.\frac{d.(A+A'M)}{dz}=\frac{dP}{dx}(C+C'M)+P.\frac{d.(C+C'M)}{dx}$; $\frac{dP}{dz}(B+B'M)+P.\frac{d.(B+B'M)}{dz}=\frac{dP}{dy}(C+C'M)+P.\frac{d.(C+C'M)}{dy}$. Si, a l'aide des deux dernieres equations, on tire les valeurs de $\frac{dP}{dx}$, & de $\frac{dP}{dy}$, & qu'on les substitue dans la premiere, on aura, après reduction faite, $(C+C'M)\left(\frac{d.(A+A'M)}{dy}-\frac{d.(B+B'M)}{dx}\right)+(A+A'M)\left(\frac{d.(B+B'M)}{dz}-\frac{d.(C+C'M)}{dy}\right)+(B+B'M)\left(\frac{d.(C+C'M)}{dx}-\frac{d.(A+A'M)}{dz}\right)$

$=o$. equation indipendante de P. On cherchera donc pour M une fonction de x, y, z, la plus generale qui soit possible, & qui puisse satisfaire a cette equation. Ayant trouvé M, on cherchera pour P une fonction de x, y, z, qui satisfasse a deux quelconques des trois equations, qu'on a trouvées d'abord cy-dessus; ce qui, a la verité, exige souvent beaucoup de recherches; mais cela est du moins toujours possible.

CCCCXXII.

La Methode que nous venons d'expliquer pourroit aussi s'appliquer a des quantités, différentielles qui ne seroient point reduites en equations, & qui renfermeroient certaines conditions. Telles seroient, par exemple, les deux quantités différentielles de cette forme $\alpha ds + \beta du$, & $\rho\alpha du + r\beta ds + du.\varphi(u,s) + ds.\varphi'(u,s)$, dans lesquelles ρ, & r designent des constantes données; $\varphi(u,s)$ & $\varphi'(u,s)$ des fonctions quelconques de u, & de s. On pourroit par les methodes precedentes rendre ces deux différentielles complettes; c'est a dire, determiner les valeurs α, & β enforte que les deux différentielles proposées soient intégrables.

Supposons pour cela que l'une & l'autre différentielle soit complette, on divisera par la constante ρ tous les termes de la seconde différentielle, & faisant $\frac{r}{\rho} = n$

& divisant la seconde différentielle par $\sqrt{n}$, on ecrira les deux différentielles comme il suit $\beta\sqrt{n}.\frac{du}{\sqrt{n}} + \alpha ds$; $\frac{\alpha du}{\sqrt{n}} + \beta\sqrt{n}.ds + \frac{du.\phi(u,s)}{\varrho\sqrt{n}} + \frac{ds.\phi'(u,s)}{\varrho\sqrt{n}}$. Or, puisque chacune des deux différentielles doit être complette, il est clair que leur somme, & leur différence doit aussi être une differentielle complette. Donc 1.° si on les ajoute ensemble, & qu'on fasse $\alpha + \beta\sqrt{n} = m$, & $\frac{u}{\sqrt{n}} + s = t$, on aura une transformée $mdt + dt.\times F(t,s) + ds.\Pi(t,s)$, qui doit être une différentielle complette; les expressions $F(t,s)$, $\Pi(t,s)$ designent les fonctions de t, & de s, qui proviennent de la substitution de $(t-s)\sqrt{n}$ au lieu de u. Or, par le theoreme fondamental, & par la condition, nous aurons $\frac{dm}{dt} + \frac{d.F(t,s)}{ds} = \frac{d.\Pi(t,s)}{dt}$. Donc en prenant s pour variable & t pour constante, on aura $m = -F(t,s) + Ft + S.\frac{ds.d.\Pi(t,s)}{dt}$; Ft designe une fonction de t. 2.° Si de la premiere des différentielles proposées on ôte la seconde, & qu'on fasse $\frac{u}{\sqrt{n}} - s = y$, & $\beta\sqrt{n} - \alpha = \mu$, ou, ce qui revient au même, si on multiplie la seconde de ces différentielles par -1, & qu'on les ajoute ensemble, on aura une transformée $\mu dy + dy\psi'\times$

$(y,s)+ds.F''(y,s)$, qui doit être une différentielle complette; $F'(y,s)$ est une fonction de y, s. Donc on aura par le theoreme cité $\frac{d\mu}{ds}+\frac{d.\varphi'(y,s)}{ds}=\frac{d.F''.(y,s)}{dy}$, &, en suppofant s variable, & y constante, on aura $\mu=-\varphi'(y,s)+\varphi''(y)+S.\frac{ds.d.F''(y,s)}{dy}$, l'expreffion $\varphi''(y)$ designant une fonction de y; on a donc les valeurs des quantités m, μ; d'où l'on tirera les valeurs de α, & de β, puisque $\alpha+\beta\sqrt{n}=m$, & $\beta\sqrt{n}-\alpha=\mu$, c'eft a dire, $\alpha=\frac{m-\mu}{2}$, & $\beta=\frac{m+\mu}{2\sqrt{n}}$. Il n'y auroit aucune difficulté dans l'intégration, quand même $\sqrt{n}$ feroit imaginaire, car on pourra toujours faire evanoüir les imaginaires de α, & de β, fi ces quantités doivent être réelles, comme nous avons obfervé cy-deffus. Nous pourrions faire ufage de la même methode dans des différentielles plus compliquées, telles que $\alpha ds+\beta du$, & $\rho\alpha du+p\beta du+\gamma\beta ds+\mu\alpha ds+du.\varphi(u,s)+ds.\times\varphi'(u,s)$. On rendroit ces deux différentielles complettes de la même maniere; mais il fuffit d'avoir indiqué la methode, d'autant plus que nous aurons occafion dans la fuite de traiter de ces mêmes différentielles, en parlant des différentielles du fecond ordre; & nous reprendrons quelque fois des différentielles du premier ordre, qu'on manie plus aifément par des différentielles des ordres fuperieurs.

CHAPITRE V.

Des Regles generales du Calcul Intégral des différentielles des ordres ſupérieurs.

CCCCXXIII.

NOus ne repeterons point icy ce que nous avons deja dit dans le dernier Chapitre de la premiere Partie ſur les notions generales des différentielles des ordres ſuperieurs, & ſur l'intégration de celles qui ne renferment qu'une ſeule variable x, & dans leſquelles la premiere différence dx eſt ſuppoſée conſtante. Nous donnerons les regles generales pour reduire les différentielles du ſecond ordre a celles du premier, les différentielles du troiſieme ordre a celles du ſecond, & ainſi de ſuite, lorſque la choſe eſt poſſible; & pour decouvrir quand elle eſt impoſſible; en commençant par les différentielles a une ſeule variable x, dans leſquelles la premiere différence x n'eſt pas ſuppoſée conſtante, & venant enſuite aux différentielles qui renferment pluſieurs variables. Au reſte un principe très-ſimple & très-fecond pour trouver ces regles generales eſt de choiſir une différentielle generale d'un ordre quelconque, de la différentier en ſuppoſant la différence d'une

des variables conſtante, ou en laiſſant tout variable & d'en deduire enſuite les regles pour reduire cette différentielle a celle d'un ordre inférieur qu'on avoit choiſie. Ce principe d'invention nous a été d'une graude utilité dans tout le Calcul Intégral des différentielles du premier ordre, ſoit pour trouver les regles generales de ce Calcul, ſoit pour demontrer celles qu'on avoit deja trouvées.

CCCCXXIV.

Soit Xdx une différentielle generale du premier ordre a une ſeule variable x, dans laquelle on ſuppoſe que X eſt une fonction quelconque de x & de conſtantes, & dx variable. Si on la différentie, on aura $Xddx + X'dx^2$, pour ſa différentielle du ſecond ordre, dans laquelle X' ſera encore une fonction de x, & de conſtantes, telle que $X' = \frac{dX}{dx}$, puiſque la différentielle de $Xdx = Xddx + dx . dX = Xddx + dx . X'dx$. On conclûra de cette formule generale, que toute différentielle du ſecond ordre a une ſeule variable finie x, & dans laquelle dx eſt auſſi variable, ne peut-être exacte ou reductible a une différentielle du premier ordre, a moins qu'elle ne puiſſe ſe reduire a la forme $Xddx + X'dx^2$, dans laquelle X eſt une fonction de x & de conſtantes, & $X' = \frac{dX}{dx}$. Donc, ſi on propoſe

d'intégrer une différentielle quelconque du ſecond ordre, qui ne renferme qu'une variable finie x, avec dx auſſi variable, il faudra d'abord voir s'il eſt poſſible de la reduire a la forme $Xddx + X'dx^2$, & enſuite ſi, après cette reduction, on trouve $X' = \frac{dX}{dx}$; car ſi elle n'a pas ces deux conditions, elle ne ſera pas intégrable; c'eſt a dire, qu'on ne pourra pas la reduire a une différentielle du premier ordre. Mais, ſi elle a ces deux conditions, on aura d'abord ſon intégrale Xdx, qu'on pourra enſuite intégrer par les methodes de la premiere Partie.

EXEMPLE. On propoſe d'intégrer la différentielle du ſecond ordre $ax^2ddx + 2axdx^2 + b^2xddx + b^2dx^2 + cx^{-3}ddx - 3cx^{-4}dx^2$, ou $(ax^2 + b^2x + cx^{-3})ddx + (2ax + b^2 - 3cx^{-4})dx^2$. En la comparant avec la formule generale $Xddx + X'dx^2$, on aura $X = ax^2 + b^2x + cx^{-3}$, & $X' = 2ax + b^2 - 3cx^{-4}$. Il faut donc voir ſi $X' = \frac{dX}{dx}$. Or en prenant la différentielle de $ax^2 + b^2x + cx^{-3}$, on trouve $2axdx + b^2dx - 3cx^{-4}dx$, &, diviſant par dx, le quotient eſt $2ax + b^2 - 3cx^{-4} = X'$. Donc la différentielle

proposée a la condition requise & son intégrale est $Xdx = ax^2dx + b^2xdx + cx^{-3}dx$, comme on peut s'en assûrer en prenant la différentielle de cette intégrale. Si on vouloit de plus l'intégrale de Xdx, on trouveroit $\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}b^2x^2 - \frac{1}{2}cx^{-2} + C$ constante qu'on determineroit par la regle ordinaire.

CCCCXXV.

Soit $Xddx + X'dx^2$ la différentielle generale du second ordre a une seule variable x reductible ou non reductible au premier ordre. Si on la différencie en faisant varier dx & ddx, on aura pour sa différentielle du troisieme ordre $Xd^3x + ddx.dX + 2X'dxddx + dx^2.X$ $dX' = Xd^3x + X''dxddx + 2X'dxddx + X'''dx^3$, en supposant $dX = X''dx$, & $dX' = X'''dx$, ou $X'' = \frac{dX}{dx}$, & $X''' = \frac{dX'}{dx}$. Donc si on propose d'intégrer ou de reduire au second ordre une différentielle du troisieme ordre, qui ne renferme qu'une seule variable finie x, & dans laquelle les différences dx & ddx soient aussi variables, il faudra d'abord la reduire a la forme $Xd^3x + X'dxddx +$ $2X'dxddx + X'''dx^3$, & voir ensuite si elle a les conditions requises, ou si elle donne les equations $X'' =$ $\frac{dX}{dx}$,

$\frac{dX}{dx}$, & $X''' = \frac{dX'}{dx}$. Si elle n'a pas ces conditions, elle ſera irreductible; ſi elle les a, ſon intégrale ſera $Xddx + X'dx^2$ *.

EXEMPLE. Soit propoſée la différentielle du troiſieme ordre $ax^3 d^3x + 3ax^2 dxddx + 2bx^2 dxddx + 2bxdx^3$, en la comparant terme a terme avec la formule generale $Xd^3x + X''dxddx + 2X'dxddx + X'''dx^3$, on trouve $X = ax^3$, $X'' = 3ax^2$, $X' = bx^2$, $X''' = 2bx$. Il faut donc voir ſi on trouve auſſi les deux egalités $X'' = \frac{dX}{x}$, & $X''' = \frac{dX'}{dx}$. Or puiſque $X = ax^3$, on aura $dX = 3ax^2 dx$, par conſequent $\frac{dX}{dx} = 3ax^2 = X''$, & puiſque $X' = bx^2$, on aura $dX' = 2bxdx$; par conſequent $\frac{dX'}{dx} = 2bx = X'''$: donc l'equation propoſée a les conditions requiſes, & ſon intégrale eſt $Xddx + X'dx^2 = ax^3 ddx + bx^2 dx^2$.

CCCCXXVI.

On pourroit trouver quelques difficultés dans la comparaiſon de la différentielle propoſée avec la formule

generale. Car cette formule etant exprimée ainsi $Xd^3 X + (X'' + 2X') dx ddx + X''' dx^3$ & la différentielle proposée de cette maniere $ax^3 d^3 x + (3ax^2 + 2bx^2) dx ddx + 2bx dx^3$ on trouveroit d'abord $X = ax^3$, & $X''' = 2bx$, mais on pourroit être embarassé pour determiner les valeurs de X' & de X'' par l'equation $X'' + 2X' = 3ax^2 + 2bx^2$. Cette difficulté disparoit en faisant attention aux deux egalités $X'' = \frac{dX}{dx}$, & $X''' = \frac{dX'}{dx}$, lorsque la différentielle proposée est intégrable, ou reductible au second ordre. Car puisqu'on a deja trouvé $X = ax^3$ & que $X'' = \frac{dX}{dx} = \frac{3ax^2 dx}{dx}$, on aura $X'' = 3ax^2$, & par consequent $2X' = 2bx^2$, & $X' = bx^2$, a cause de l'equation $X'' + 2X' = 3ax^2 + 2bx^2$. On peut appliquer ces reflexions a tous les cas.

CCCCXXVII.

Si on suppose que la seconde différence ddx soit constante, on aura $d^3 x = o$, & la formule generale deviendra $(X'' + 2X') dx ddx + X''' dx^3$, & on aura les deux egalités $X''' = \frac{dX'}{dx}$, & $X'' = \frac{dX}{dx}$. Dans la même

ſuppoſition la différentielle propoſée dans l'exemple precedent ſera $(3ax^2+2bx^2)dxddx+2bxdx^3$. En la comparant avec la formule generale, on trouve $X'''=2bx$, & $X''+2X'=3ax^2+2bx^2$; & par l'egalité $X'''=\frac{dX'}{dx}$, on aura $2bxdx=dX'$, ce qui donne par intégration $X'=bx^2$, & par conſequent $X''=3ax^2$ par l'equation $X''+2X'=3ax^2+2bx^2$. Enfin, par ce que $X''=\frac{dX}{dx}$, on aura $3ax^2dx=dX$, &, en intégrant, $X=ax^3$. Donc l'intégrale $Xddx+X'dx^3$ ſera $ax^3ddx+bx^2dx^2$. On voit aſſéz par tout ce que nous venons de dire comment on peut appliquer nôtre methode aux différentielles a une ſeule variable du quatrieme ordre, enſuite a celles du cinquieme ordre, & aux autres ſuivantes.

CCCCXXVIII.

On a ſouvent beſoin, ſurtout dans les queſtions *de maximis & minimis*, de ſuppoſer une quantité différentielle egale a zero. Lorſque cette equation différentielle eſt du premier ordre, & ne contient qu'une ſeule variable x, on n'a pas beſoin du calcul intégral pour la reſoudre. Car, ſi on a l'equation $Xdx=o$, en diviſant par dx, on trouve d'abord l'equation $X=o$, qui

ne renferme plus de différences. Mais ſi l'equation différentielle a une ſeule variable x eſt d'un ordre ſupérieur, & qu'elle contienne des différences de divers ordres dx, ddx, d^3x, &c., on ne peut la reſoudre de cette maniere, & il faut avoir recours au calcul intégral. Dans ce cas on cherchera d'abord, ſi l'equation différentielle propoſée eſt intégrable, par la methode que nous venons d'expliquer, & on l'intégrera, ſi la choſe eſt poſſible. Mais ſi la quantité différentielle de cette equation n'eſt pas exacte, ou n'a pas les conditions requiſes dans l'etat où elle ſe trouve, on la multipliera par une fonction indeterminée de x, que nous deſignerons par M; enſuite on determinera la valeur de M par les conditions requiſes, pour rendre exacte la quantité différentielle qu'on a multipliée.

CCCCXXIX.

Toutes les equations différentielles du ſecond ordre a une ſeule variable ſont intégrables par cette methode. Car ſoit $Xddx + X'dx^2 = o$ l'equation différentielle generale du ſecond degré a une ſeule variable x. En la multipliant par M, que nous ſuppoſerons être une fonction indeterminée de x, on aura $MXddx + MX'dx^2 = o$, & puiſque $MXddx + MX'dx^2$ eſt une différentielle exacte du ſecond ordre, dans laquelle

MX & MX' font des fonctions de x (par hyp.), on aura (Art. CCCCXXIV.) l'equation $MX'dx = d.(MX)$ $= MdX + XdM$, & l'intégrale cherchée fera $MXdx$ $= o$. de l'equation $MX'dx = MdX + XdM$, on tire $\frac{X'dx - dX}{X} = \frac{dM}{M}$, &, en intégrant, $S.\frac{X'dx}{X} - L.X =$ $L.M$, & $S.\frac{X'dx}{X} = L.XM$; & en fuppofant $L.e = 1$; on aura $e^{S.\frac{X'dx}{X}} = XM$ & $M = \frac{e^{S.\frac{X'dx}{X}}}{X}$. Donc l'intégrale cherchée fera $\frac{e^{S.\frac{X'dx}{X}}}{X}.Xdx = e^{S.\frac{X'dx}{X}}dx = o$, & en divifant par dx, $e^{S.\frac{X'dx}{X}} = o$, ou, en intégrant encore l'equation $e^{S.\frac{X'dx}{X}}dx = o$, on aura $S.e^{S.\frac{X'dx}{X}}dx$ $= C$ conftante. *C. Q. F. D.*

CCCCXXX.

Il n'en eft pas de même de toutes les equations différentielles du troifieme ordre a une feule variable; car il s'en trouve une infinité, qui n'ont pas toutes les conditions requifes pour être reduites au fecond ordre, même après qu'on les a multipliées par une fonction indeterminée de x, de forte qu'on ne peut trouver le facteur M, qui les rende intégrables; mais, lorfqu'elles

auront toutes les conditions neceſſaires, on pourra les reſoudre par la même methode.

CCCCXXXI.

La différentielle generale du ſecond ordre a une ſeule variable x, ou $Xddx + X'dx^2$ peut facilement ſe reduire a la forme d'une différentielle du premier ordre a deux variables x & y. Car en ſuppoſant $ddx = dy$, & par conſequent $dx = y$, & ſubſtituant, on changera la propoſée en $Xdy + X'ydx$, dont on pourra chercher l'intégrale par les regles que nous avons données pour l'intégration des différentielles du premier ordre a deux variables; & en remettant enſuite dx pour y dans cette intégrale, elle deviendra une différentielle du premier ordre a une ſeule variable x. De même la différentielle generale du troiſieme ordre, qu'on peut exprimer par cette formule $Xd^3x + X'dxddx + X''dx^3$ ſe reduit a la forme d'une différentielle du ſecond ordre a deux variables x, z, en faiſant $d^3x = ddz$; $ddx = dz$ & $dx = z$; ce qui changera la propoſée en $Xddz + X'dxdz + X''zdx^2$, & cette différentielle du ſecond ordre ſe reduit a une différentielle du premier ordre a trois variables x, z, u, en faiſant de plus $ddz = du$, & $dz = u$, & la propoſée deviendra

$X\,du + X'z\,dz + X''z\,dz + X''z^2\,dx$. Il eſt evident qu'on pourra faire les mêmes transformations a l'egard des différentielles a une ſeule variable du 4.e, 5.e, &c. ordre, qui pourront toutes ſe reduire a des différentielles inférieures a pluſieurs variables. Mais nous n'indiquons cette methode, que pour ſa generalité, elle conduiroit a des calculs trop embaraſſants, il vaut mieux ſe ſervir de la premiere, qui eſt très-ſimple. Il nous reſte a obſerver que cette premiere methode fournit immediatement la différentielle du premier ordre, ſi cela eſt poſſible. Mais il arrive ſouvent qu'une différentielle d'un ordre ſupérieur n'eſt pas reductible a une différentielle d'un ordre inférieur, & on le connoîtra aiſément par les operations que nous avons préſcrittes. Ainſi la différentielle du troiſieme ordre $ax^3\,d^3x + 3ax^2\,dx\,ddx + 2bx^2\,dx\,ddx + 2bx\,dx^3$, que nous avons reduite a la différentielle $ax^3\,ddx + bx^2\,dx^2$, n'eſt pas reductible a une différentielle du premier ordre, puiſqu'en prenant cette différentielle du premier ordre par la methode que nous avons demontrée, & la différentiant de nouveau, on ne retrouve pas la différentielle du ſecond ordre $ax^3\,ddx + bx^2\,dx^2$, comme il le faudroit. Nous allons appliquer cette même methode aux différentielles a pluſieurs variables, de quelqu'ordre

qu'elles ſoient, & quelque ſoit le nombre des variables.

CCCCXXXII.

Soit $A\,dx + B\,dy$ la différentielle generale du premier ordre a deux variables x & y, dans laquelle A & B repreſentent des fonctions quelconques de x & de y, & a laquelle on peut reduire toutes les différentielles du ſecond ordre a deux variables, lorſqu'elles ſont reductibles au premier ordre. Si on la différentie en ſuppoſant dx & dy variables, on aura pour ſa différentielle $A\,ddx + dA.dx + B\,ddy + dB.dy$, & en ſuppoſant que A', A'', B', B'' ſoient encore des fonctions de x & de y, & que $dA = A'dx + A''dy$, & $dB = B'dy + B''dx$, on aura la formule generale $A\,ddx + A'dx^2 + A''dx\,dy + B\,ddy + B'dy^2 + B''dy\,dx$, ou $A\,ddx + A'dx^2 + (A'' + B'')\,dx\,dy + B\,ddy + B'dy^2$, qui ſera reductible a la différentielle du premier ordre $A\,dx + B\,dy$, quand on aura les deux equations, ou conditions $dA = A'dx + A''dy$, & $dB = B'dy + B''dx$, & on trouvera d'abord les deux termes $A\,ddx$, $B\,ddy$ de la formule generale, en comparant avec ceux de la différentielle propoſée du ſecond ordre, où ſe trouvent auſſi le ſecondes différences ddx & ddy. Lors donc qu'on ſe propoſera d'intégrer, ou de reduire au premier ordre

ordre une différentielle quelconque du ſecond ordre a deux variables x & y, dans laquelle dx & dy ont étés ſuppoſés variables, on la comparera terme a terme avec la formule generale $Addx + A'dx^2 + (A'' + B')\times dxdy + Bddy + B'dy^2$, & on determinera d'abord les valeurs des fonctions A & B par la comparaiſon des termes, où ſe trouvent les ſecondes différences ddx & ddy; on prendra $Adx + Bdy$ pour l'intégrale de la propoſée du ſecond ordre; enſuite on différentiera l'intégrale trouvée $Adx + Bdy$, & ſi la différentielle convient avec la propoſée, on aura ce qu'on cherche, ſi elle ne convient pas, la propoſée ne ſera pas reductible au premier ordre.

Par exemple, ſi la propoſée etoit $ax^2yddx + 2ayxdx^2 + (ax^2 + 3b^2y^2x^2)dxdy + b^2x^3y^2ddy + 2b^2x^2ydy^2$, en comparant le terme ax^2yddx avec le terme correſpondant $Addx$ de la formule generale, on trouve $A = ax^2y$; & de même en comparant le terme $b^2x^3y^2ddy$ avec le terme correſpondant $Bddy$ de la formule generale, on trouve $B = b^2x^3y^2$ ce qui donne pour l'intégrale de la propoſée $ax^2ydx + b^2x^3y^2dy = Adx + Bdy$; & on trouve icy que ſa

différentielle convient avec la différentielle du second ordre proposée, d'où l'on conclût que $ax^2ydx + b^2x^3y^2dy$ est la veritable intégrale cherchée du premier ordre.

CCCCXXXIII.

Si on suppose dx constante dans la différentielle generale du premier ordre $Adx + Bdy$, la différentielle du premier terme Adx, ou $d(Adx)$ sera $A'dx^2 + A''dxdy$, en supposant que $A'dx$ est la différentielle de A prise dans l'hypothese de x seule variable dans A; par consequent, si on prend l'intégrale du terme $A'dx$ en ne faisant varier que x dans A', cette intégrale sera A. Donc dans la supposition de dx constante, la formule generale de la différentielle du second ordre sera $A'dx^2 + (A'' + B'')dxdy + Bddy + B'dy^2$, qu'on trouve en effaçant dans la formule de l'Article precedent le premier terme $Addx$, qui devient nul, a cause de dx constante, ou de $ddx = o$. Cette formule sera reductible a une différentielle du premier ordre $Adx + Bdy$, quand on aura les deux equations de condition $dA = A'dx + A''dy$, & $dB = B'dy + B'dx$, & alors en comparant la formule $A'dx^2 + (A'' + B'')dxdy + Bddy + B'dy^2$ avec la diffé-

rentielle proposée du second ordre, dans laquelle dx est supposée constante, on trouvera d'abord la valeur de B par la comparaison du terme $Bddy$ avec son correspondant pris dans la différentielle proposée; & on trouvera aussi la valeur de A' par la comparaison du terme $A'dx^2$ avec son correspondant pris dans la différentielle proposée; ensuite on intégrera le terme $A'dx$ dans la supposition de x seule variable & l'intégrale sera A. Donc en substituant les deux valeurs de A & de B dans la formule $Adx+Bdy$, on aura l'intégrale, ou la reduite de la différentielle proposée du second ordre, a laquelle on ajoutera une constante indeterminée Cdx, qu'on determinera ensuite par l'etat de la question suivant la regle. Enfin pour s'assûrer que l'intégrale trouvée est exacte, on en prendra la différentielle, & on la comparera avec la proposée du second ordre. Si elles conviennent, on aura ce qu'on cherchoit; si elles ne conviennent point, la proposée ne sera pas reductible au premier ordre.

EXEMPLE. Soit proposée la différentielle du second ordre $2ayxdx^2+(ax^2+3b^2x^2y^2)dxdy+b^2\times x^3y^2ddy+2b^2x^3ydy^2$, dans laquelle dx est constante. En la comparant avec la formule generale, on trouve d'abord $Bddy=b^2x^3y^2ddy$; par consequent

$B = b^2 x^3 y^2$. On trouve ensuite $A' dx^2 = 2ayx dx^2$; par consequent $A' = 2ayx$, $A' dx = 2ayx dx$, & en intégrant $2ayx dx$, en ne faisant varier que x, on aura l'intégrale $ayx^2 = A$. Donc la proposée du second ordre se reduit a la différentielle du premier ordre $ayx^2 dx + b^2 x^3 y^2 dy + C dx$, & cette reduite est exacte, puisque sa différentielle est la même que la proposée.

CCCCXXXIV.

Il peut arriver que dans la différentielle proposée du second ordre il manque quelque terme de ceux qui se trouvent dans la formule generale, & que neantmoins cette différentielle soit reductible au premier ordre; par exemple, si la proposée etoit $2ayx dx^2 + (ax^2 + 3bx^2) dx dy + bx^3 ddy$, dans laquelle dx est constante, & qui n'a point de terme correspondant au terme $B' dy^2$ de la formule generale, on trouveroit $B' = 0$, $B = bx^3$, & $A' = 2ayx$; par consequent $A' dx = 2ayx dx$; & en intégrant ce terme dans la supposition de x seule variable, on auroit $A = ayx^2$. Donc l'intégrale cherchée, ou la reduite du premier ordre seroit $ayx^2 dx + bx^3 dy + C dx$, qui est encore exacte, puisque sa différentielle est la même que la proposée.

CCCCXXXV.

On trouvera par la même methode les formules generales, & les equations de condition, pour reduire les différentielles du troisieme ordre a deux variables, aux différentielles du second ordre, les différentielles du quatrieme ordre a celles du troisieme, & ainsi de suite, lorsqu'elles sont reductibles, & pour connoître lorsqu'elles sont reductibles, soit qu'elles renferment des différences constantes, ou que ces différences soient toutes variables, il n'y aura d'autres difficultés, que celles qui viennent de la longueur inevitable des calculs.

Car soit $Adx^2 + A'dxdy + Bddy + B'dy^2$ la différentielle generale du second ordre a deux variables x & y, dans laquelle dx est supposée constante, A, A', B, B' des fonctions de x, de y, & de constantes. En la différentiant terme par terme, on trouve que sa différentielle du troisieme ordre est $dAdx^2 + A'dxddy + dA'dxdy + Bd^3y \cdot + dBddy + 2B'dyddy + dB'dy^2$. Or puisque A, A', B, B' sont des fonctions de x & de y, on aura les equations suivantes $dA = A''dx + A'''dy$, en supposant $A'' = \frac{(dA)}{dx}$, & $A''' = \frac{(dA)}{dy}$ C'est a dire que A'' sera une fonction de x & de y, & de constantes, qu'on trouve en differentiant la fonction A, dans la supposition de x seule variable, & de y constante, &

que A''' sera aussi une fonction de x, de y, & de constantes, qu'on trouve en différentiant la fonction A dans la supposition de y seule variable, & de x constante.

$dA' = A^{IV}dx + A^{V}dy$, en supposant $A^{IV} = \frac{(dA')}{dx}$, & $A^{V} = \frac{(dA')}{dy}$

$dB = B'dy + B''dx$, en supposant $B' = \frac{(dB)}{dy}$, & $B'' = \frac{(dB)}{dx}$

$dB' = B^{IV}dy + B^{V}dx$, en supposant $B^{IV} = \frac{(dB')}{dy}$, & $B^{V} = \frac{(dB')}{dx}$

Si on substitue ces valeurs dans la différentielle generale du troisieme ordre $dAdx^2 + A'dxddy +$ &c. que nous avons trouvée cy-dessus, elle deviendra $A''dx^3 + A'''dydx^2 + A'dxddy + A^{IV}dydx^2 + A^{V}dxdy^2 + Bd^3y + B'dyddy + B'''dxddy + 2B'dyddy + B^{IV} \times dy^3 + B^{V}dxdy^2 = A''dx^3 + (A''' + A^{IV})dydx^2 + (A' + B''')dxddy + (A^{V} + B^{V})dxdy^2 + Bd^3y + (2B' + B'')dyddy + B^{IV}dy^3$; formule que nous designerons par (K).

Lors donc qu'on voudra intégrer, ou reduire au second ordre une différentielle quelconque du troisieme ordre, a deux variables x & y, dans laquelle dx soit constante, on la comparera avec la formule generale (K), & on determinera d'abord les valeurs de A'', de B, & de B^{IV} par la comparaison des termes $A''dx^3$,

$B d^3 y$, $B^{IV} dy^3$ avec les termes correſpondans pris dans la différentielle propoſée. Enſuite on trouvera la valeur de A par l'equation $\frac{(dA)}{dx} = A''$, qui donne $dA = A''dx$, & $A = S. A''dx$, en prenant cette intégrale dans la ſuppoſition de x ſeule variable, & de y conſtante dans la fonction A''. Après cela on trouvera la valeur A''' par l'equation $A''' = \frac{(dA)}{dy}$. De là, & de l'equation entre le terme de la formule generale $(A''' + A^{IV}) dy dx^2$, & le terme correſpondant de la différentielle propoſée, on tirera la valeur de A^{IV}. On tirera la valeur de B''' par l'equation $\frac{(dB)}{dx} = B'''$; & de là, & de l'equation entre le terme $(A' + B''') dx ddy$, & le terme correſpondant de la propoſée, on tirera la valeur de A. Pour trouver celle de B' on cherchera d'abord la valeur de B'' par l'equation $B'' = \frac{(dB)}{dy}$; enſuite on ſe ſervira de l'equation entre le terme $(2B' + B'') \times dyddy$, & le terme correſpondant de la propoſée, pour determiner la valeur de $2B'$, & par conſequent celle de B'. Après ces operations on aura les valeurs de A, de A', de B, & de B', qu'on ſubſtituera dans la différentielle generale du ſecond ordre $A dx^2 + A' dx dy$

$+Bddy+B'dy^2$; & on aura l'intégrale ou la reduite cherchée, dont on s'aſsûrera en prenant ſa différentielle & en comparant cette différentielle avec la propoſée. Si elles conviennent, on aura l'intégrale cherchée, en y ajoutant la conſtante indeterminée Cdx^2 ; ſi elles ne convennient pas, la propoſée ne ſera pas reductible au ſecond ordre.

EXEMPLE. Soit propoſée la différentielle du troiſieme ordre $aydx^3+axdydx^2+(by+2cx)dxddy+(b+f)dxdy^2+cx^2d^3y+2fxdyddy$, dans laquelle dx eſt conſtante. En la comparant avec la formule generale (K), on trouvera d'abord $A''=ay$, $B=cx^2$, & $B^{IV}=o$. Enſuite $A=S.A''dx=ayx$, $A'''=\frac{(dA)}{dy}=ax$; $ax+A^{IV}=Ax$: donc $A^{IV}=o$; $B''=\frac{(dB)}{dx}=\frac{2cxdx}{dx}=2cx$; $A'+2cx=by+2cx$, donc $A'=by$; $B'=\frac{(dB)}{dy}=o$; $2B'+B''=2B'=2fx$; $B'=fx$. On aura donc $A=ayx$, $A'=by$, $B=cx^2$, & $B'=fx$, & en ſubſtituant ces valeurs dans la différentielle generale du ſecond ordre, elle devient $ayxdx^2+bydxdy+cx^2ddy+fxdy^2+Cdx^2$, en ajoutant la conſtante Cdx^2; & en la différentiant, on retrouve exactement la propoſée.

CCCCXXXVI.

CCCCXXXVI.

On trouve par la même methode les formules generales, & les equations de condition pour reduire les différentielles a 3, 4, 5, &c. variables d'un ordre supérieur aux différentielles d'un ordre inférieur d'un degré, lorsqu'elles sont reductibles, & pour connoître quand elles sont irreductibles.

Car soit $Adx + Bdy + Cdz$ la différentielle generale du premier ordre a trois variables x, y, z, dans laquelle A, B, C sont des fonctions quelconques de ces variables & de constantes. En la différentiant on trouve la formule generale des différentielles du second ordre a trois variables $Addx + dAdx + Bddy + dBdy + Cddz + dCdz$, en supposant que les trois différences dx, dy, dz sont variables. Nous designerons cette formule par (H), & nous formerons les equations suivantes

$$dA = A'dx + A''dy + A'''dz, \text{ en supposant } A' = \frac{(dA)}{dx};\ A'' = \frac{(dA)}{dy};\ A''' = \frac{(dA)}{dz}$$

$$dB = B'dx + B''dy + B'''dz, \text{ en supposant } B' = \frac{(dB)}{dx};\ B'' = \frac{(dB)}{dy};\ B''' = \frac{(dB)}{dz}$$

$$dC = C'dx + C''dy + C'''dz, \text{ en supposant } C' = \frac{(dC)}{dx};\ C'' = \frac{(dC)}{dy};\ C''' = \frac{(dC)}{dz}$$

Si on substitue dans la formule (H) les valeurs de dA, de dB, & de dC, que donnent ces equations, cette formule deviendra $Addx + A'dx^2 + A''dydx +$

$A''' dz\,dx + B\,ddy + B' dx\,dy + B'' dy^2 + B''' dz\,dy + C\,ddz + C' dx\,dz + C'' dy\,dz + C'' dz^2 = A\,ddx + A\,dx^2 + (A' + B')\,dx\,dy + (A''' + C')\,dx\,dz + B\,ddy + B'' dy^2 + (B''' + C'')\,dy\,dz + C\,ddz + C''' dz^2$, formule que nous deſignerons par (K).

Lors donc qu'on ſe propoſera de reduire au premier ordre une différentielle quelconque du ſecond ordre a trois variables x, y, z, dans laquelle les trois différences dx, dy, dz ſeront auſſi variables, on la comparera avec la formule generale (K), & on determinera d'abord les valeurs de A, de B, & de C; celle de A en egalant $A\,ddx$ au terme correſpondant de la différentielle propoſée, celle de B en egalant $B\,ddy$ au terme correſpondant de la propoſée, & celle de C en egalant $C\,ddz$ au terme correſpondant de la propoſée. Enſuite on ſubſtituera ces valeurs au lieu de A, B, C dans la formule generale du premier ordre $A\,dx + B\,dy + C\,dz$, qui ſera l'intégrale cherchée, lorſque la différentielle propoſée du ſecond ordre ſera reductible au premier ordre; & on s'en aſsûrera en différentiant cette intégrale, & en comparant ſa différentielle avec la propoſée.

Si on ſuppoſe que l'une des trois différences premieres dx, dy, dz ſoit conſtante, on effaçera dans la formule (K) le terme où ſe trouve la ſeconde différen-

ce de la variable, dont la premiere différence eſt ſuppoſée conſtante. Ainſi ſi on ſuppoſe dx conſtante, on effaçera dans la formule (K) le terme $Addx$, qui devient nul a cauſe de $ddx=o$, & le reſte ſera la formule generale convenable a la ſuppoſition de dx conſtante.

EXEMPLE. Soit propoſée la différentielle du ſecond ordre a trois variables avec leurs premieres différences auſſi variables $ax^3y^2ddx+3ay^2x^2dx^2+(2ax^3y+bz^2)dxdy+bxz^2ddy+2bxzdydz$. On aura par les comparaiſons préſcrittes $Addx=ax^3y^2ddx$, $Bddy=bxz^2ddy$, & $C=o$, d'où l'on tire $A=ax^3y^2$, $B=bxz^2$, & $C=o$; par conſequent l'intégrale ſera $ax^3y^2+bxz^2dy$, qui eſt exacte, puiſqu'en la différentiant on retrouve la différentielle propoſée.

CCCCXXXVII.

Ces exemples ſuffiſeut pour faire comprendre la generalité de la methode, & il ſeroit trop long d'entrer dans de plus grands details. Nous ajouterons icy un mot ſur une autre methode egalement generale, que nous avons indiquée en parlant des différentielles d'ordres ſupérieurs a une ſeule variable. C'eſt d'introduire dans la différentielle propoſée d'un ordre ſupérieur de nouvelles variables, avec leurs différences moins hautes de l'unité, que les plus hautes différences de chaque variable dans la propoſée; enforte, par

exemple, que, si la plus haute différence de x dans la différentielle proposée est d^3x, on suppose $d^3x = ddz$, par consequent $ddx = dz$; si la plus haute différence de y dans la proposée est ddy, on suppose $ddy = du$; par consequent $dy = u$, & ainsi des autres différences. On substitue ensuite dans la proposée les valeurs trouvées d'une maniere convenable pour diminuer d'un degré l'ordre de cette différentielle, & on cherche aprés cela l'intégrale de la différentielle proposée reduite a la forme d'une différentielle d'un ordre inférieur d'un degré par les regles qui sont propres a cet ordre.

Soit, par exemple, $Adx^2 + A'dxdy + Bddy + B'dy^2$ la différentielle generale du second ordre a deux variables x & y, dans laquelle on suppose dx constante. En faisant $dx = c$. constante, & $ddy = du$, par consequent $dy = u$, on la reduira a la forme d'une différentielle du premier ordre a trois variables x, y, u, & elle deviendra, en substituant, $Acdx + A'cdy$ ou $(A'udx) + Bdu + B'udy$, dont on cherchera l'intégrale par les regles qu'on a données pour intégrer les différentielles du premier ordre a trois variables; & quand on aura trouvé cette intégrale, on y remettra dx au lieu de c, & dy au lieu de u, & on aura une différentielle du premier ordre a deux variables x & y, pour l'intégrale ou la reduite de la proposée du second ordre.

Nous allons paſſer maintenant a l'application de nôtre premiere methode generale aux mêmes différentielles miſes en equations, c'eſt a dire, egalées a zero.

CCCCXXXVIII.

On voit bien d'abord que, ſi ces différentielles priſes abſolument & ſans être egalées a zero, ſont intégrables, ou reductibles a un ordre inférieur, on trouvera leurs intégrales par les regles que nous avons données, & que ces intégrales egalées a zero, ou a une conſtante de leur ordre feront les intégrales des equations propoſées. Mais ſi ces mêmes différentielles ne ſont pas reductibles a un ordre inférieur dans l'etat où elles ſont, il n'en faut pas conclûre qu'elles ſoient irreductibles ſous la forme d'equations; car il pourroit arriver qu'en les multipliant par un facteur commun, elles devinſſent reductibles, comme nous l'avons deja eprouvé dans les equations différentielles du premier ordre (Chap. I. Part. II.). Lors donc qu'on a trouvé par les regles precedentes, que la quantité différentielle, qui eſt egale a zero dans l'equation propoſée, n'eſt pas exacte dans l'etat où elle eſt, il faudra la multiplier par un facteur indeterminé, qu'on ſuppoſera compoſé, comme il ſera convenable, de variables & de conſtantes; & enſuite on determinera ce facteur, lorſqu'il ſera poſſible, par les equations auxquelles il devra

ſatisfaire. C'eſt ce que nous allons expliquer plus en detail.

CCCCXXXIX.

Suppoſé que $Eddx + Fdx^2 + Gdxdy + Hddy + Kdy^2 = o$ ſoit l'equation différentielle quelconque du ſecond ordre, qu'on ſe propoſe de reduire au premier ordre, & que E, F, G, H, K ſoient des fonctions des deux variables x, y, & de conſtantes, avec les premieres différences dx & dy variables. On cherchera d'abord par les regles precedentes, ſi cette différentielle priſe abſolument & dans l'etat où elle eſt, peut ſe reduire au premier ordre, & lorſqu'on aura trouvé qu'elle n'eſt pas reductible en cet etat, on la multipliera par un facteur indeterminé M, qu'on ſuppoſera être une fonction quelconque des variables x, y, & de conſtantes, & on la changera dans l'equation $MEddx + MFdx^2 + MGdxdy + MHddy + MKdy^2 = o$, qu'on regardera comme une equation reductible au premier ordre. On la comparera dans cette ſuppoſition avec la formule generale $Addx + A'dx^2 + (A'' + B'')dxdy + Bddy + B'dy^2$, qui eſt reductible a la différentielle du premier ordre $Adx + Bdy$, lorſqu'on a les quatre equations $A' = \frac{(dA)}{dx}$,

$A'' = \frac{(dA)}{dy}$, $B' = \frac{(dB)}{dy}$, & $B'' = \frac{(dB)}{dx}$. Car les deux autres equations $dA = A'dx + A''dy$, & $dB = B'dy + B''dx$ ne ſont que des conſequences neceſſaires des quatre premieres. Cette comparaiſon donnera les cinq equations ſuivantes $A = ME$, $A' = MF$, $A'' + B'' = MG$, $B = MH$, $B' = MK$, d'où l'on tirera l'equation $MF = \frac{(d.ME)}{dx}$, au lieu de l'equation $A' = \frac{(dA)}{dx}$; l'equation $MK = \frac{(d.MH)}{dy}$, au lieu de $B' = \frac{(dB)}{dy}$; $A'' = \frac{(dA)}{dy} = \frac{(d.ME)}{dy}$; $B'' = \frac{(dB)}{dx} = \frac{(d.MH)}{dx}$, & l'equation $MG = \frac{(d.ME)}{dy} + \frac{(d.MH)}{dx}$, au lieu de l'equation $MG = A'' + B''$. On aura donc les trois equations ſuivantes

$$\text{I.} \quad MF = \frac{(d.ME)}{dx} = \frac{M(dE)}{dx} + \frac{E(dM)}{dx}.$$

$$\text{II.} \quad MK = \frac{(d.MH)}{dy} = \frac{M(dH)}{dy} + \frac{H(dM)}{dy}.$$

$$\text{III.} \quad MG = \frac{(d.ME)}{dy} + \frac{(d.MH)}{dx} = \frac{M(dE)}{dy} + \frac{E(dM)}{dy} + \frac{M(dH)}{dx} + \frac{H(dM)}{dx}.$$

On trouve par la premiere de ces trois equations $\frac{(dM)}{dx} = \frac{MF}{E} - \frac{M}{E} \cdot \frac{(dE)}{dx}$, & par la ſeconde $\frac{(dM)}{dy} = \frac{MK}{H}$

$-\frac{M}{H} \cdot \frac{(dH)}{dy}$; ſubſtituant ces valeurs de $\frac{(dM)}{dx}$ & de $\frac{(dM)}{dy}$ dans la troiſieme equation, & diviſant par M, qui ſe trouve dans tous ſes termes, elle devient $G = \frac{EK}{H} - \frac{E(dH)}{Hdy} + \frac{(dF)}{dy} + \frac{(dH)}{dx} + \frac{FH}{E} - \frac{H}{E} \cdot \frac{(dE)}{dx}$, equation de condition que doit donner la propoſée, pour qu'on puiſſe la rendre reductible au premier ordre, en la multipliant par M. Si la propoſée ne donne point cette equation de condition, il faudra l'abandonner comme irreductible; mais ſi elle donne cette equation, on prendra pour le facteur M une fonction generale des variables x & y, & de conſtantes indeterminées, & on cherchera enſuite a determiner le tout au moyen des deux equations, $MF = \frac{M(dE)}{dx} + \frac{E(dM)}{dx}$, & $MK = \frac{M(dH)}{dy} + \frac{H(dM)}{dy}$, auxquelles le facteur M doit ſatisfaire.

EXEMPLE. Soit propoſée l'equation du ſecond ordre $ax^2yddx + 3ayxdx^2 + (2ax^2 + 2by^3)dxdy + bxy^3ddy + 4bxy^2dy^2 = 0$. Si on compare la quantité différentielle de cette equation avec la formule generale $Addx + A'dx^2 + (A'' + B')dxdy + Bddy + B'by^2$, on trouvera $A = ax^2y$, $B = bxy^3$, & $Adx + Bdy =$ ax^2ydx

$ax^2ydx + bxy^3dy$. Mais en différentiant cette quantité, on trouve que ſa différentielle $ax^2yddx + 2ayxdx^2 + (ax^2 + by^3)dxdy + bxy^3ddy + 3bxy^2dy^2$ ne convient pas avec la propoſée; d'où l'on conclût que la quantité $ax^2ydx + bxy^3dy$ n'eſt pas l'intégrale qu'on cherche. Il faut donc voir ſi on pourra trouver un facteur M, fonction de x & de y, qui, en multipliant la propoſée, la rende intégrable. Pour cela on comparera la propoſée avec la formule generale $Eddx + Fdx^2 + Gdxdy + Hddy + Kdy^2$, & on aura les valeurs ſuivantes $E = ax^2y$, $F = 3ayx$, $G = 2ax^2 + 2by^3$, $H = bxy^3$, $K = 4bxy^2$; & ſubſtituant ces valeurs dans l'equation de condition $G = \frac{EK}{H} - \frac{E(dH)}{Hdy} + \frac{(dE)}{dy} + \frac{(dH)}{dx} + \frac{FH}{E} - \frac{H}{E}.\frac{(dE)}{dx}$, on trouve $2ax^2 + 2by^3 = \frac{ax^2y \times 4bxy^2}{bxy^3} - \frac{ax^2y \times 3bxy^2}{bx^3} + ax^2 + by^3 + \frac{3ayx \times bxy^3}{ax^2y} - \frac{bxy^3}{ax^2y} . 2axy = 4ax^2 - 3ax^2 + ax^2 + by^3 + 3by^3 - 2by^3 = 2ax^2 + 2by^3$. Donc l'equation de condition a lieu; & on cherchera le facteur M au moyen des deux equations $MF = \frac{(d.EM)}{dx}$, & $MK = \frac{(d.HM)}{dy}$, ou $3ayxM = \frac{(d.ax^2yM)}{dx}$, & $4bxy^2M =$

$\frac{(d.bxy^3M)}{dy}$. Suppoſons $M = x^m y^n$, les expoſans m & n etant indeterminés, on doit donc avoir les deux equations $3ay^{n+1}x^{m+1} = \frac{(d.ax^{m+2}y^{n+1})}{dx} = (m+2) \times ax^{m+1}y^{n+1}$, & $4bx^{m+1}y^{n+2} = \frac{(d.bx^{m+1}y^{n+3})}{dy} = (n+3)bx^{m+1}y^{n+2}$; d'où l'on tire $m+2=3$, & $n+3=4$; par conſequent $m=1$, & $n=1$. Le facteur M ſera donc xy, & en effet ſi l'on multiplie l'equation propoſée par xy, elle devient $ax^3y^2ddx + 3ay^2x^2dx^2 + (2ax^3y + 2bxy^4)dxdy + bx^2y^4ddy + 4bx^2y^3dy^2 = o$, & ſon intégrale exacte eſt $ax^3y^2dx + bx^2y^4dy = o$.

CCCCXL.

Nous ne pouſſerons pas plus loin l'application de cette premiere methode. On comprend facilement par ce que nous avons dit ſur les différentielles du troiſieme ordre & des ſupérieurs a 2, 3, &c. variables, & par les Articles precedens, comment on peut s'en ſervir pour les equations a 2, 3, &c. variables des ordres plus elevés que le ſecond. Toute la difficulté conſiſte dans la longueur des calculs, qui eſt inévitable, lorſqu'-

il s'agit des equations différentielles du 3.e, 4.e, &c. ordre, & furtout lorfqu'elles contiennent plus de deux variables. Il n'eft pas même neceffaire que nous traitions icy des equations différentielles, dans lefquelles on fuppofe une premiere différence, comme dx, conftante, car nous allons donner une methode generale pour rendre variables toutes les premieres différences dans toutes les equations différentielles, où l'on en aura fuppofé une conftante, & reciproquement nous donnerons la methode de rendre a volonté une des deux différences conftante, & enfin nous expliquerons par d'autres methodes la maniere d'intégrer les equations différentielles d'un ordre fupérieur, dans lefquelles on fuppofe une premiere différence conftante. Au refte on voit par tout ce que nous avons deja dit (Article CCCCXXXVII.), qu'en mettant dans l'equation du fecond ordre a deux variables une conftante au lieu de la différence premiere qu'on a fuppofé conftante, par exemple, c au lieu de dx, & une variable u pour la premiere différence dy de l'autre variable, on reduit cette equation du fecond ordre a la forme d'une equation du premier ordre a trois variables, qu'on traitera comme telle par fes methodes, que nous avons expliquées fort au long dans le Chapitre I. de la feconde Partie; & on pourra reduire de même les equations différentielles du troifieme ordre a la forme de celles du fecond ordre, & ainfi des autres.

CCCCXLI.

Soit $A\,dx^2 + B\,dx\,dy + C\,dy^2 + D\,ddy = 0$ une equation différentielle a deux variables, & du second ordre, dans laquelle la premiere différence dx eſt ſuppoſée conſtante, on la ramenera aiſément a une différentielle, qui ne renfermera aucune différence conſtante.

On diviſera cette equation par dx, pour avoir $A\,dx + B\,dy + \frac{C\,dy^2}{dx} + \frac{D.d(dy)}{dx} = 0$. Il eſt clair qu'a cauſe de dx ſuppoſée conſtante, on peut ecrire $\frac{D.d(dy)}{dx}$ a la place de $\frac{D\,ddy}{dx}$; mais ſi l'on veut que dx ſoit variable, on aura alors en différentiant $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2}$, & par conſequent l'equation ſe change en celle-cy $A\,dx + B\,dy + \frac{C\,dy^2}{dx} + D\left(\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2}\right)$, qui n'a aucune différence conſtante. L'operation feroit la même pour les différentielles des ordres ſupérieurs. Soit la différentielle du troiſieme ordre $A\,dx^3 + B\,dx^2\,dy + C\,dy^2\,dx + D\,dy^3 + E\,dx\,ddy + F\,dy\,ddy + G\,d^3y = 0$, dans laquelle dx eſt toujours ſuppoſée conſtante. On aura, en diviſant par dx^2, $A\,dx + B\,dy + \frac{C\,dy^2}{dx} +$

$\frac{Ddy^3}{dx^2} + \frac{Eddy}{dx} + \frac{Fdyddy}{dx^2} + \frac{Gd^3y}{dx^2} = o$, que l'on pourra auſſi ecrire ainſi $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + \frac{Ddy^3}{dx^2} +$

$$E.d\left(\frac{dy}{dx}\right) + F.\frac{dy}{dx}.d\left(\frac{dy}{dx}\right) + G.d\left[\left(\frac{1}{dx}\right)d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = o,$$

dans laquelle equation on fera tout varier dans les différentiations indiquées par la lettre d; on aura alors une equation a différences troiſiemes ſans aucune conſtante. Il eſt evident qu'on pourroit de la même maniere faire varier dx, & rendre dy conſtante. Car dans l'equation différentielle precedente du ſecond ordre $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + D.d\left(\frac{dy}{dx}\right) = o$, on pourra différentier $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ en ſuppoſant dx variable, & dy conſtante. On feroit la même choſe dans l'equation différentielle du troiſieme ordre, en faiſant varier dx, & rendant dy conſtante dans tous les termes affectés du ſigne de différentiation. Cette transformation eſt utile dans bien des cas, car il arrive ſouvent que le choix de la différentielle, qu'on ſuppoſe conſtante, facilite beaucoup l'intégration comme nous le verrons dans la ſuite.

CCCCXLII.

On peut faire les transformations precedentes par le moyen de quelques ſubſtitutions, qui peuvent ſou-

vent être d'un grand usage. Soient x, y les deux variables, on introduit une nouvelle variable p, en faisant $pdx = dy$, on fait de plus $qdx = dp$, $rdx = dq$, ou $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$, &c.; dx etant constante. Si on veut maintenant rendre variables dx, & dy, on aura en différentiant $dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$, & par consequent $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, & $dq =$ $\frac{dx^2 d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dxdyd^3x}{dx^4}$, & ainsi de suite. Soit, par exemple, l'expression différentielle $\frac{xddy}{dx^2}$, dans laquelle dx est supposée constante. En faisant $pdx = dy$, $dp = qdx$, elle se change en qx; mais cette quantité laquelle en apparence ne renferme aucune différentielle, en substituant la valeur de $q =$ $\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, devient $\frac{xdxddy - xdyddx}{dx^3}$, qui n'a plus aucune différentielle constante.

De même si on avoit la différentielle $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$, dans laquelle on suppose dy constante, on feroit $dy = pdx$, $dp = qdx$, l'expression precedente se changera en cette autre $-\frac{p(1 + pp)}{q}$, & substituant a la place de p & de q leurs valeurs, on aura la différentielle sans

conſtantes $\frac{dy(dx^2+dy^2)}{dyddx-dxddy}$. Il arrive aſſéz ſouvent dans la ſolution des Problemes qu'on ſuppoſe ydx, & $\sqrt{dx^2+dy^2}$ conſtantes. On changeroit de la même façon ces différentielles en d'autres expreſſions ſans différentielles conſtantes. Soit la différentielle $\frac{yddx+xddy}{dxdy}$, dans laquelle on ſuppoſe ydx conſtante, on aura par la ſubſtitution $-1-\frac{xq}{p}+\frac{xp}{y}$, laquelle, en ne ſuppoſant aucune différentielle conſtante, devient $-1+\frac{xdy}{ydx}-\left(\frac{xdxddy-xdyddx}{dx^2dy}\right)=$
$\frac{xdxdy^2-ydx^2dy-yxdxddy+yxdyddx}{ydx^2dy}$. Enfin ſoit $\frac{dx^2+dy^2}{ddy}$, dans laquelle on ſuppoſe conſtante $\sqrt{dx^2+dy^2}$; en faiſant, comme cy-devant, $dy=pdx$, & $dp=qdx$, la différentielle ſe reduit a cette forme $\frac{(1+pp)^2}{q}$, & en ſubſtituant $\frac{dy}{dx}$ a la place de p, & $\frac{dxddy-dyddx}{dx^3}$ a la place de q, on aura $\frac{(dx^2+dy^2)^2}{dx^2ddy-dxdyddx}$, expreſſion qui ne renferme plus aucune différentielle conſtante. Il eſt evident que, ſi on vouloit au contraire transformer une différentielle d'un

ordre fupérieur quelconque, dans laquelle on n'auroit fuppofé aucune différentielle conftante, en une autre, dans laquelle on regarderoit comme conftante quelque différentielle, il ne faudroit que fuppofer cette différentielle egale a zero, par exemple, $ddx=o$, $d^3x=o$, ou $ddy=o$, $d^3y=o$, &c. De même, fi on avoit une différentielle, dans laquelle on auroit fuppofé une des différentielles conftante, on pourroit la reduire a une autre expreffion, dans laquelle on fuppoferoit l'autre différentielle conftante, il faudroit feulement ramener la premiere expreffion a une autre, qui n'auroit plus de différentielles conftantes, & faire enfuite celle qu'on voudroit egale a zero.

CCCCXLIII.

On peut deduire de ces transformations une methode aifée pour examiner les equations différentielles a deux variables d'un ordre quelconque, c'eft a dire, pour determiner fi ces différentielles font abfurdes, & fi elles ne peuvent avoir lieu dans la folution d'aucun Probleme.

Etant propofée une equation différentielle d'un ordre quelconque, dans laquelle on n'a fuppofé aucune différentielle conftante, on fera dx conftante, & on reduira enfuite l'equation a une forme, qui ne fuppofe aucune

aucune différentielle conſtante en ecrivant comme cy-devant $ddy - \frac{dyddx}{dx}$ a la place de ddy, & $d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx}$ a la place de d^3y. Cela etant fait, on obſervera ſi l'equation qui en reſulte convient avec la propoſée. Si cela ſe trouve, la propoſée renferme un rapport determiné entre les variables x & y; mais, ſi cela n'arrive pas, l'equation ſera vague, & ne fournira aucun rapport certain entre x & y. Car puiſqu'on ne ſuppoſe aucune différentielle conſtante, il eſt libre de choiſir la conſtante, & ayant ſuppoſé l'une ou l'autre différentielle conſtante, la ſuppoſition doit donner le même rapport entre les variables, autrement l'equation n'exprimeroit aucun rapport determiné. Or les equations différentielles a deux variables proviennent d'equations finies entre ces variables, & elles expriment par conſequent un certain rapport entre x & y, enſorte que, y etant une fonction de x, l'equation différentielle doit devenir identique, en ſubſtituant x a la place de y, & ſes différentielles au lieu de dy, dy^2, &c. Nous allons eclaircir cette methode importante par l'equation ſuivante $Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = o$, qui n'a point de différentielle conſtante, & dans laquelle P, Q, R, S, T ſont des fonctions de x & de y. On fait dx conſtante, & l'equation devient

$Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = o$, a cause de $ddx = o$ on reduit ensuite cette différentielle a une autre forme qui n'a plus de differentielle constante, & on a $-\frac{Qdyddx}{dx} + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = o$, qui ne differe de la premiere, que dans le premier terme; il faut donc observer si $P = -\frac{Qdy}{dx}$. Si cela arrive, l'equation proposée exprimera un rapport determiné entre x & y, qu'on pourra trouver par le calcul intégral; autrement l'equation sera absurde ou impossible, & par consequent il sera inutile d'en chercher l'intégrale dans cet etat. Il faut donc, afin que la proposée ne soit point absurde, que $Pdx + Qdy$ soit $= o$. Or cela peut arriver de deux façons; car l'equation $Pdx + Qdy = o$ peut être identique, c'est a dire, $P = -\frac{Qdy}{dx}$, ou bien $Pdx + Qdy = o$ peut être l'equation différentielle du premier degré, par la différentiation de laquelle on a eû la différentielle proposée du second ordre. Dans ce cas on auroit la différentielle de $Pdx + Qdy = Pddx + Qddy + dPdx + dQdy = o$, laquelle etant soustraite de la différentielle proposée, donne $Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = dPdx + dQdy$. Or $dy = -\frac{Pdx}{Q}$; donc, en substituant, on pourra faire disparoître les différentielles, & on aura une equation finie

entre x & y: par consequent l'equation proposée pourra se resoudre dans ce cas sans le secours du calcul intégral, & elle sera du nombre de celles que nous avons traitées ailleurs. Nous ajouterons un exemple d'une equation impossible.

Soit donc l'equation sans aucune différentielle constante $yyddx - xxddy + ydx^2 - xdy^2 + adxdy = o$; on aura, en comparant avec l'equation generale precedente $P = yy$, $Q = -xx$, & par consequent $yydx - xxdy = o$, laquelle equation etant différentiée une seconde fois, & egalée a la proposée donneroit $ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 2ydxdy - 2xdxdy$; mais puisque $dy = \frac{yydx}{xx}$, on aura, en eliminant les différentielles, $y - \frac{y^4}{x^3} + \frac{ayy}{xx} = \frac{2y^3}{xx} - \frac{2yy}{x}$, ou $x^3 - y^3 + axy = 2xyy - 2xxy$. Voyons maintenant si cette equation convient avec la différentielle $yydx - xxdy = o$, on aura en différentiant & formant l'egalité $3xxdx - 3yydy + axdy + aydx = 2yydx + 4xydy - 2xxdy - 4xydx$, ou bien $\frac{dy}{dx} = \frac{3xx + ay - 2yy + 4xy}{3yy - ax - 2xx + 4xy}$, de laquelle equation, & de $dy = \frac{yydx}{xx}$, on tire $\frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx}$, & par consequent $3x^4 + 4x^3y + axxy = 3y^4 + 4xy^3 - axyy$,

ou $axy = \frac{3y^4 + 4xy^3 - 4x^3y - 3x^4}{x+y} = 3y^3 + xyy - xxy - 3x^3$. Mais nous avions deja trouvé l'equation finie $axy = y^3 + 2xyy - 2xxy - x^3$, laquelle etant foustraite de la precedente, donne $2y^3 - xyy + xxy - 2x^3 = o$, equation qui peut fe refoudre en celles-cy, $o = y - x$, & $o = 2yy + yx + 2xx$. La premiere $y - x = o$, ou $y = x$ peut fatisfaire a l'equation trouvée $dy = \frac{yydx}{xx}$; mais elle eft iucompatible avec l'equation finie $x^3 - y^3 + axy = 2xyy - 2xxy$, a moins qu'on ne faffe $a = o$, ou qu'on ne fuppofe x & y conftantes, dans lequel cas $dx = o$, & $dy = o$ fatisfait a toutes les equations différentielles; ce qui eft abfurde, & par confequent la différentielle propofée eft impoffible.

CCCCXLIV.

Nous allons faire voir maintenant l'ufage des transformations precedentes pour faciliter les intégrations des différentielles fupérieures. Soit l'equation différentielle $dx^2 dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$, dans laquelle on fuppofe dx conftante, & qu'on ne voit pas tout d'un coup être intégrable. Nous rendons dx variable en ecrivant, comme nous avons dit cy-deffus $dxdy -$

$\frac{dy^3}{dx} = (adx + xdx)\,d.\left(\frac{dy}{dx}\right)$, & en prenant dy conſtante dans la différentiation indiquée par la parentheſe, nous aurons la différentielle $dxdy - \frac{dy^3}{dx} = -(adx + xdx)\frac{dyddx}{dx^2}$, laquelle etant reduite devient $dx^2 + xddx + addx - dy^2 = o$, dont on trouve auſſitôt l'intégrale en faiſant $ddx = du$, $dx = u$; car la différentielle ſe change en $udx + xdu + adu - dy^2 = o$. L'intégrale des trois premiers termes eſt $ux + au$, & l'intégrale du quatrieme $-dy^2$ eſt $-ydy$, a cauſe de dy conſtante. Donc l'intégrale totale eſt $xdx + adx - ydy + Cdy = o$, en remettant la valeur de u, & ajoutant la conſtante Cdy du même ordre que l'intégrale. Enfin en intégrant de nouveau on aura $\frac{1}{2}x^2 + ax - \frac{1}{2}y^2 + Cy + C' = o$, comme il eſt evident.

CCCCXLV.

Quoiqu'on ne puiſſe pas etablir de regle generale pour le choix de la différentielle conſtante, ce choix cependant eſt fort ſouvent indiqué a un Calculateur experimenté par la forme de l'equation propoſée, comme on verra par les deux Exemples ſuivants.

Soit l'equation différentielle $2Xx^3dy^3 = dy^3 + dx^2dy - xdyddx + xdxddy$, ou $X = \frac{dy^3 + dx^2dy - xdyddx + xdxddy}{2x^3dy^3}$, dans laquelle X represente une fonction quelconque de x. Nous observons dans cette equation, que les deux termes $dx^2dy + xdxddy$ divisées par dx donnent $dxdy + xddy$, dont l'intégrale est xdy. On remarque encore que $dx^2dy - xdyddx$ divisés par $-x^2dy$, donnent $\frac{-dx^2 + xddx}{xx}$, dont l'intégrale est $\frac{dx}{x}$, d'où l'on voit qu'on peut detruire egalement deux termes dans la proposée, en supposant constante l'une, ou l'autre intégrale xdy, ou $\frac{dx}{x}$.

Supposons en premier lieu $xdy = C$ constante; donc $xddy + dydx = o$, & en multipliant par dx, on aura encore $xdxddy + dydx^2 = o$, ce qui reduit la différentielle proposée a celle-cy $X = \frac{dy^3 - xdyddx}{2x^3 + dy^3}$. Mais $xddy + dxdy = o$, d'où l'on tire $dy = -\frac{xddy}{dx}$; donc en substituant cette valeur a la place de dy, nous aurons $X = -\frac{xdy^2ddy}{2x^3dxdy^3} - \frac{xdyddx}{2x^3dy^3} =$

$\frac{-x dy^3 ddy - x dy dx ddx}{2x^3 dx dy^3} = \frac{-dy^2 ddy - dy dx ddx}{2x^2 dx dy^3}$. Mais $x dy = C$ par la ſuppoſition. Donc $dy = \frac{C}{x}$, & $X = \frac{-dy ddy - dx ddx}{2C^2 dx}$, ou $X dx = \frac{-dy ddy - dx ddx}{2C^2}$, &, en intégrant, $S. X dx = \frac{-dy^2 - dx^2}{4C^2} \pm C' = \frac{-dy^2 - dx^2}{4x^2 dy^2} \pm C'$, en remettant a la place de C ſa valeur $x dy$.

On auroit pû intégrer cette différentielle tout d'un coup, aprés être arrivé a l'equation $X = \frac{dy^3 - x dy ddx}{2x^3 dy^3}$, en multipliant par dx; car on auroit $X dx = \frac{dx}{2x^3} - \frac{dx ddx}{2x^2 dy^2}$, dont l'intégrale, a cauſe de $x^2 dy^2$ conſtante, eſt $S. X dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2 dy^2} \pm C'$, comme cy-deſſus.

Suppoſons en ſecond lieu $\frac{dx}{x}$ conſtante; cette ſuppoſition donne $\frac{x ddx - dx^2}{xx} = o$, & en multipliant par $-xx dy$, on a $-x dy ddx + dx^2 dy = o$, equation qui fait evanoüir le ſecond & le troiſieme termes de la différentielle propoſée qui devient $X = \frac{dy^3 + x dx ddy}{2x^3 dy^3}$, & en multipliant par dx nous aurons $X dx =$

$\frac{dxdy^3 + xdx^2ddy}{2x^3dy^3} = \frac{dx}{2x^3} + \frac{dx^2ddy}{2x^2dy^3}$. Or si dans le terme $\frac{dx^2ddy}{2x^2dy^3}$, on fait $ddy = du$, & par consequent $dy = u$, & $dy^3 = u^3$, on aura la différentielle $\frac{1}{2}x^{-3}dx + \frac{1}{2}.\frac{dx^2}{x^2}.u^{-3}du$, dont l'intégrale est $S.Xdx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2u^2} \pm C' = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2dy^2} \pm C'$, en mettant la valeur de u, & ajoutant la constante; ce qui donne la même intégrale que la precedente.

Soit enfin proposée l'equation suivante $xy(dxddy - dyddx) = ydydx^2 - yydYdy^2 - xdxdy^2$, dans laquelle Y est une fonction quelconque de y. Nous remarquons que dans cette equation il y a trois termes, sçavoir, $yxdyddx + ydydx^2 - xdxdy^2$, lesquels divisés par $yydy$ forment une différentielle complette $\frac{yxddx + ydx^2 - xdxdy}{yy}$, dont l'intégrale est $\frac{xdx}{y}$. On prend donc pour constante $\frac{xdx}{y}$; ce qui donne en différentiant $\frac{xyddx + ydx^2 - xdxdy}{yy} = o$. Donc la proposée se reduit a $xydxddy + yydYdy^2 = o$, c'est a dire, $dY = \frac{-xdxddy}{ydy^2}$, dont l'intégrale est $Y = \frac{xdx}{ydy} \pm C$,

$\pm C$, comme il eſt evident, $\frac{xdx}{y}$ etant ſuppoſée conſtante.

On peut conclûre de ces exemples que, pour rendre l'intégration plus facile, il faut obſerver ſi dans la différentielle propoſée il y a deux, trois, ou pluſieurs termes, qui etant multipliés, ou diviſés par un facteur commun, puiſſent s'intégrer; on en prend l'intégrale, & c'eſt cette intégrale qu'on ſuppoſe conſtante.

CCCCXLVI.

Nous ajouterons icy une methode generale pour intégrer les equations différentielles des ordres ſupérieurs, lorſqu'elles ne ſont pas intégrables dans l'etat où elles ſe trouvent, & qu'il faut les multiplier par un facteur pour les rendre exactes. Nous commençerons par les equations a deux variables x & y, dans leſquelles il n'y a point de différences qui paſſent le ſecond ordre, a quelques puiſſances que ſoient elevées les premieres différences dx & dy. Nous ſuppoſerons qu'une de ces premieres différences eſt conſtante; mais il ſera facile d'en conclûre comment il faudroit ſe conduire, ſi elles etoient toutes deux variables.

CCCCXLVII.

Soit $Addy + B = o$ l'equation generale qui peut repreſenter toute equation différentielle a deux variables

x & y, dans laquelle dx eſt conſtante, & qui ne contient d'autre différence ſeconde que ddy, avec des puiſſances quelconques des premieres différences dx & dy, A & B etant des fonctions quelconques de x, y, dx, dy, & de conſtantes. On ecrit ainſi cette equation $Addy + \frac{(B-K)}{dy} dy + \frac{K}{dx}. dx = o$, qui eſt la même que la precedente, puiſque $\frac{(B-K)}{dy} dy + \frac{K}{dx}. dx = B - K + K = B$.

On multiplie cette equation par un facteur indeterminé M, qu'on ſuppoſe être une fonction de x, y, dx, dy, & de conſtantes; & l'on a le produit $MAddy + M\frac{(B-K)}{dy} dy + \frac{MK}{dx}. dx = o$, qu'on ſuppoſe être une différentielle complette, que nous deſignerons par (O). Cela poſé, nous aurons trois différences, ſçavoir, ddy, dy, & dx. Regardant donc ces trois différences, comme celles d'autant de variables dy, y, & x, & la différentielle complette (O), comme la même que celle-cy, $MAddy + MB'dy + MCdx$, en ſuppoſant $B' = \frac{B-K}{dy}$, & $C = \frac{K}{dx}$, on aura (Art. CCCXXXVI.) ces trois equations $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB')}{ddy}$; $\frac{(d.MA)}{dx} = \frac{(d.MC)}{ddy}$; $\frac{(d.MB')}{dx} = \frac{(d.MC)}{dy}$, ou, en remettant les valeurs de B' & de C, les trois ſuivantes

$$\text{I.}\quad \frac{(d.\,MA)}{dy} = \frac{\left(d.\,M.\frac{B-K}{dy}\right)}{ddy};$$

$$\text{II.}\quad \frac{(d.\,MA)}{dx} = \frac{\left(d.\frac{MK}{dx}\right)}{ddy};$$

$$\text{III.}\quad \frac{\left(d.\,M.\frac{B-K}{dy}\right)}{dx} = \frac{\left(d.\frac{MK}{dx}\right)}{dy}.$$

De ces trois equations on pourroit par le même Art. CCCXXXVI. en deduire une où M n'entreroit plus, & qui serviroit a determiner K; ensuite on determineroit M au moyen de deux des trois equations precedentes. Mais on peut simplifier cette recherche, & la borner a chercher pour M une fonction de x, y, dx, dy, qui satisfasse a ces deux equations.

La differentielle du produit $\frac{1}{dy}.\,M(B-K)$ prise en ne faisant varier que dy, aprés qu'on l'a divisée par ddy, est $-\frac{1}{dy^2}.\,M(B-K)+\frac{1}{dy}.\,\frac{[d.(MB-MK)]}{ddy}=$
$-\frac{1}{dy^2}.\,M(B-K)+\frac{1}{dy}.\,\frac{(d.\,MB)}{ddy}-\frac{1}{dy}.\,\frac{(d.\,MK)}{ddy}$.

Donc la premiere des trois equations cy-dessus se reduit a celle-cy, $\frac{(d.\,MA)}{dy}=-\frac{1}{dy^2}.\,M(B-K)+\frac{1}{dy}.\,\frac{(d.\,MB)}{ddy}-\frac{1}{dy}.\,\frac{(d.\,MK)}{ddy}$. Nous la designerons par (P).

La ſeconde equation $\frac{(d.MA)}{dx} = \frac{\left(d.\frac{MK}{dx}\right)}{ddy} = \frac{1}{dx} \cdot \times \frac{(d.MK)}{ddy}$ donne $\frac{(d.MK)}{ddy} = dx . \frac{(d.MA)}{dx}$, & ſubſtituant cette valeur dans l'equation (P), on aura $\frac{(d.MA)}{dy} = -\frac{1}{dy^2} . M(B-K) + \frac{1}{dy} . \frac{(d.MB)}{ddy} - \frac{dx}{dy} . \frac{(d.MA)}{dx}$; d'où l'on tire $M(B-K) = dy . \frac{(d.MB)}{ddy} - dxdy . \frac{(d.MA)}{dx} - dy^2 . \frac{(d.MA)}{dy}$, & $MK = MB - dy . \frac{(d.MB)}{ddy} + dxdy . \times \frac{(d.MA)}{dx} + dy^2 . \frac{(d.MA)}{dy}$; d'où il ſera facile d'avoir K, dès que M ſera connu.

Subſtituant les valeurs de $M(B-K)$, & de MK, qu'on vient de trouver dans la premiere equation $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{\left(d.M.\frac{B-K}{dy}\right)}{ddy}$, & dans la troiſieme $\frac{\left(d.M.\frac{B-K}{dy}\right)}{dx} = \frac{\left(d.\frac{MK}{dx}\right)}{dy}$, on aura les deux equations ſuivantes

$$\text{I.} \quad \frac{(d.MA)}{dy} = \frac{\left[d.\left\{\frac{(d.MB)}{ddy} - dx\frac{(d.MA)}{dx} - dy\frac{(d.MA)}{dy}\right\}\right]}{ddy}$$

$$\text{II.} \quad \frac{\left[d.\left\{\frac{(d.MB)}{ddy} - dx\frac{(d.MA)}{dx} - dy\frac{(d.MA)}{y}\right\}\right]}{dx} = \frac{\left[d.\left\{\frac{MB}{dx} - \frac{dy}{dx} . \frac{(d.MB)}{ddy} + dy\frac{(d.MA)}{dx} + \frac{dy^2}{dx} . \frac{(d.MB)}{dy}\right\}\right]}{dy}$$

Nous designerons la premiere de ces deux equations par (Q), & la seconde par (R).

La question est donc reduite a trouver pour M une fonction de x, y, dx, dy & de constantes, qui satisfasse a ces deux equations. Mais quoique cela soit toujours possible, cela n'est pas egalement facile. Nous nous contenterons d'examiner quelques equations plus limitées, mais cependant très-etenduës, aprés avoir observé qu'en ecrivant 1 pour M dans les deux dernieres equations, on aura les deux equations de condition necessaires, pour qu'une equation différentielle quelconque du second ordre a deux variables x, & y, avec dx constante, soit intégrable dans l'etat où elle est.

CCCCXLVIII.

Soit proposé d'intégrer l'equation du second ordre $Edx^2 + Fdxdy + Gdy^2 + Hddy = 0$, dans laquelle dx est constante. E, F, G, H, & le facteur M qui lui manque pour la rendre intégrable, sont des fonctions de x, de y, & de constantes, qui ne renferment ny dx, ny dy.

Si l'on compare cette equation a l'equation generale $Addy + B = 0$, on aura $A = H$; $B = Edx^2 + Fdxdy + Gdy^2$, & par consequent $MB = MEdx^2 + MFdxdy + MGdy^2$; substituant ces valeurs de A, de

MB, & de B dans les deux equations (Q) & (R), que nous avons trouvées cy-dessus pour determiner M, & faisant attention a la supposition que nous faisons, sçavoir, que E, F, G, H, & M, ne renferment ny dx, ny dy, la premiere equation (Q) deviendra $\frac{(d.MH)}{dy} = MG$, & la seconde equation (R), aprés y avoir aussi substitué pour $\frac{(d.MH)}{dy}$ sa valeur MG, deviendra

$$\frac{\left[d.\left\{MFdx + MGdy - dx\frac{(d.MH)}{dx}\right\}\right]}{dx} = \frac{\left[d.\left\{MEdx + dy\frac{(d.MH)}{dx}\right\}\right]}{dy};$$

car, si on prend la différentielle de MB en ne faisant varier que dy, on aura $d.MB = MFdxddy + 2MGdyddy$; par consequent $\frac{(d.MB)}{ddy} = MFdx + 2MGdy$; & $\frac{(d.MB)}{ddy} - dx\frac{(d.MA)}{dx} - dy\frac{(d.MA)}{dy} = MFdx + 2MGdy - dx\frac{(d.MH)}{dx} - dy\frac{(d.MH)}{dy}$. La différentielle de toute cette quantité, en ne faisant varier que dy, & divisant par ddy, est $2MG - \frac{(d.MH)}{dy}$. Donc la premiere equation (Q) sera $\frac{(d.MH)}{dy} = 2MG - \frac{(d.MH)}{dy}$, ou $\frac{2(d.MH)}{dy} = 2MG$, & $\frac{(d.MH)}{dy} = MG$.

Si dans le premier membre de la seconde equation (R) on substitue $MFdx + 2MGdy$ pour $\frac{(d.MB)}{ddy}$, &

MG pour $\frac{(d.MH)}{dy}$, ce premier membre deviendra $\frac{[d.\{MFdx+MGdy-dx\frac{(d.MH)}{dx}\}]}{dx}$; & si dans le second membre de la même equation (R) on substitue $MEdx+MFdy+\frac{MGdy^2}{dx}$ pour $\frac{MB}{dx}$; $MFdy+\frac{2MGdy^2}{dx}$, pour $\frac{dy}{dx}.\frac{(d.MB)}{ddy}$, & $\frac{MGdy^2}{dx}$ pour $\frac{dy^2}{dx}.\frac{(d.MA)}{dy}$, ce second membre deviendra $\frac{[d.\{MEdx+dy\frac{(d.MH)}{dx}\}]}{dy}$. La seconde equation sera donc telle que nous l'avons dit.

Or, puisque par la premiere equation $MG=\frac{(d.MH)}{dy}$, en prenant la différentielle de part & d'autre, & ne faisant varier que x, & divisant ensuite par dx, on aura $\frac{(d.MG)}{dx}=\frac{[d.\{\frac{(d.MH)}{dy}\}]}{dx}=\frac{[d.(d.MH)]}{dxdy}$; substituant cette valeur de $\frac{(d.MG)}{dx}$ dans la seconde equation; aprés en avoir divisé chaque membre par dx, & se ressouvenant que dx est toujours constante, on trouve $\frac{(d.MF)}{dx}-\frac{[d.(d.MH)]}{dxdx}=\frac{(d.ME)}{dy}$, entendant par cette expression qu'on doit différentier MH en faisant varier x, & diviser ensuite par dx, puis différentier le resultat en faisant varier x, & diviser encore par dx. Les

deux equations $\frac{(d.MF)}{dx} - \frac{[d.(d.MH)]}{dx.dx} = \frac{(d.MF)}{dy}$, & $MG = \frac{(d.MH)}{dy} = \frac{M(d.H)}{dy} + \frac{H(dM)}{dy}$ ſont celles que nous avons a traiter actuellement pour intégrer la propoſée.

Obſervons maintenant que dans cette derniere equation il n'y a que y qui ſoit regardée comme variable. Cela poſé, en multipliant toute l'equation par dy, puis la diviſant par MH, & tranſpoſant, on trouve $\frac{dM}{M} = \frac{Gdy}{H} - \frac{d.H}{H}$; prenant l'intégrale, en regardant y ſeule comme variable, puiſque la différentiation a été faite dans cette ſuppoſition, on aura $L.M = S.\frac{Gdy}{H} - L.H + L.X$; on ajoute pour conſtante la quantité $L.X$, par laquelle on entend une fonction de x & de conſtantes; c'eſt par ce qu'on a ſuppoſé x conſtante dans la différentiation.

En ſuppoſant $L.e = 1$, on aura $L.M = S.\frac{Gdy}{H} \times L.e - L.H + L.X = L.e^{S.\frac{Gdy}{H}} - L.H + L.X$, d'où l'on tire $M = \frac{X}{H} e^{S.\frac{Gdy}{H}}$. Si l'on ſubſtitue cette valeur de M dans l'equation $\frac{(d.MF)}{dx} - \frac{[d.(d.MH)]}{dx.dx} = \frac{(d.ME)}{dy}$ & que l'on diviſe enſuite par $e^{S.\frac{Gdy}{H}}$, on aura l'equation,

tion, qui doit determiner X. Or, comme X doit être une fonction de x, il s'enſuit que pour que l'equation ſoit intégrable par la multiplication d'un facteur composé ſeulement de x, de y, & de conſtantes, il faut que dans celle-cy toutes les y diſparoiſſent.

Suppoſons, par exemple, que l'equation propoſée ſoit $2ydx^2 + (2x + 3yx)dxdy + 2x^2dy^2 + x^2yddy = o$, qui n'eſt point intégrable dans l'etat où elle eſt; on aura donc $H = x^2y$, $G = 2x^2$, $F = 2x + 3yx$, $E = 2y$; donc $\frac{G}{H}dy = \frac{2dy}{y}$, $S.\frac{G}{H}dy = L.y^2$, & $M = \frac{X}{x^2y}e^{L.y^2}$. Or $e^{L.y^2} = y^2$; car, puiſque $L.e = 1$, on aura $L.y^2.L.e = L.y^2$; par conſequent $L.e^{L.y^2} = L.y^2$ & $e^{L.y^2} = y^2$. Donc $M = \frac{Xy^2}{x^2y} = \frac{Xy}{x^2}$. Subſtituant cette valeur de M, & celles de H, F, E dans l'equation $\frac{(d.MF)}{dx} - \&c.$, on aura $\frac{2ydX}{xdx} - \frac{2yX}{x^2} + \frac{3y^2dX}{xdx} - \frac{3y^2X}{x^2} - \frac{y^2ddX}{dx^2} = \frac{4yX}{x^2}$; ou bien $\frac{2ydX}{xdx} - \frac{6yX}{x^2} + \frac{3y^2dX}{xdx} - \frac{3y^2X}{x^2} - \frac{y^2ddX}{dx^2} = o$. Egalant donc a zero la ſomme des termes affectés de la même puiſſance de y, on aura les deux equations $\frac{2ydX}{xdx} - \frac{6yX}{x^2} = o$, &

$\frac{3y^2 dX}{x dx} - \frac{3y^2 X}{x^2} - \frac{y^2 ddX}{dx^2} = o$. Divisant ensuite la premiere equation par y, & l'autre par y^2, on aura, aprés reduction faite, $\frac{dx}{X} = \frac{3dx}{x}$, & $-x^2 ddX + 3xdXdx - 3Xdx^2 = o$. La premiere equation etant intégrée donne $L.X = 3L.x = L.x^3$; par consequent $X = x^3$, & cette valeur substituée dans la seconde, y satisfait. On a donc $X = x^3$, & par consequent $M = \frac{Xy}{x^2} = xy$.

Maintenant, si l'on remonte a la valeur de MK deja trouvée, on aura $MK = 2xy^2 dx^2 + 3x^2y^2 dxdy$, & $M(B-K) = 2x^2 y dxdy + 2x^3 y dy^2$, ensorte que l'equation rapportée a la forme generale $MAddy + M\frac{(B-K)}{dy}dy + \frac{MK}{dx}.dx = o$ devient $x^3y^2 ddy + (2x^2ydx + 2x^3ydy)dy + (2xy^2dx + 3x^2y^2dy) \times dx = o$. On trouvera par les methodes que nous avons données, que cette différentielle est complette, & que son intégrale, en ajoutant la constante, est $x^3y^2dy + x^2y^2dx + cdx = o$.

On peut prendre pour ſecond exemple l'equation $2dx^2 + (3x + y + 2)dydx + 2xdy^2 + (x^2 + xy) \times ddy = o$, qui s'intégrera de la méme maniere. On trouvera $X = x$, & $M = x + y$.

CCCCXLIX.

Si aprés la ſubſtitution de la valeur de M dans l'equation $\frac{(d.MF)}{dx}$ &c., tous les y diſparoiſſent d'eux-mêmes, l'equation qui doit donner X eſt alors différentielle du ſecond ordre, enſorte qu'il ſemble que dans ce cas la methode n'eſt d'aucune utilité. Mais il faut obſerver que l'equarion, qu'on aura alors, ſera de cette forme $Adx^2 + BXdx^2 + CdXdx + EddX = o$; A, B, C, E etant des fonctions de x, & de conſtantes. Or, pour intégrer cette equation, on l'ecrit ainſi $AM'dx^2 + BM'Xdx^2 + (C - K')M'dxdX + K'M'dxdX + EM'ddX = o$, qui eſt la même que la precedente multipliée par le facteur M'. On ſuppoſe enſuite que, M' & K' etant des fonctions de x ſeulement, les quatre derniers termes de cette equation forment enſemble une différentielle exacte; alors le premier terme Adx^2 dans lequel A eſt une fonction de x, & dx conſtant s'intégrera aiſément. Les equations qui reſultent de cette ſuppoſition ſont (Art. CCCXXXII.)

I. $\frac{(d. E M')}{d x} = \frac{[d.(K' M' d X + B M X d x)]}{d d X}$;

II. $\frac{(d. E M')}{d X} = \frac{[d.(C - K') M' d x]}{d d X}$;

III. $\frac{[d.(K' M' d X + B M' X d x)]}{d X} = \frac{[d.(C - K') M' d x]}{d x}$;

IV. $\frac{[d.(C - K') M' d x]}{d x} = \frac{(d. B M' X d x)}{d X}$.

Mais, par ce que K', M', A, B, &c. ne renferment point X, la seconde equation est nulle, la premiere se reduit a $\frac{(d. E M')}{d x} = K' M'$, & la troisieme avec la quatrieme se reduit a $\frac{[d.(C - K') M']}{d x} = B M'$, a cause de la constante $d x$. De l'equation $\frac{(d. E M')}{d x} = K' M'$ on tire $\frac{E(d. M')}{d x} + \frac{M'(d E)}{d x} = K' M'$, & $\frac{d M'}{M'} = \frac{K' d x}{E} - \frac{d E}{E}$; & en intégrant $L. M' = S. \frac{K'}{E} d x - L. E + L. H$; H etant une constante, &, en supposant $L. c = 1$, on aura $M' = \frac{H}{E} c^{S. \frac{K'}{E} d x}$. De l'autre equation $\frac{[d.(C - K') M']}{d x} = B M'$ on tire $\frac{M'[d.(C - K')]}{d x} + \frac{(C - K')(d. M')}{d x} = B M'$; $(C - K') d M' = B M' d x - M'. d.(C - K')$, & $\frac{d M'}{M'} = \frac{B d x - d.(C - K')}{C - K'}$. En egalant

cette valeur a l'autre $\frac{K'dx - dE}{E}$, qu'on a trouvée cy-dessus, on aura l'equation $\frac{Bdx - d.(C-K')}{C-K'} = \frac{K'dx - dE}{E}$, & par consequent $BEdx - EdC + EdK' = (C - K')K'dx - (C-K')dE$, ou $BEdx - K'(C-K')dx + (C-K')dE - EdC + EdK' = o$, equation différentielle du premier ordre seulement, dont depend la valeur de K'. Supposant donc qu'on ait determiné K' par le moyen de cette equation, on aura M' par l'equation $M' = \frac{H}{E} e^{S.\frac{K}{H}dx}$; alors K' & M' etant trouvés, on aura X en mettant les valeurs de K' & de M' dans l'equation $AM'dx^2 + BM'Xdx^2 + (C - K') \times M'dxdX + K'M'dxdX + EM'ddX = o$, & en intégrant. Or comme cette equation ne peut manquer d'être a present une différentielle complette, & qu'on peut lui donner cette forme $(AM'dx + BM'Xdx + K'M'dX)dx + \{(C-K')M'dx\}dX + EM'ddX = o$, & la regarder comme une différentielle complette a trois variables x, X, & dX; on peut prendre pour son intégrale celle du premier terme $(AM'dx + BM'Xdx + K'M'dX)dx$, en ne faisant varier que x, & traitant X, dX, & dx dans la parenthese comme constantes; ce qui donne pour l'intégrale $dx.S.AM'dx + Xdx.S.BM'dx + dX. \times S.K'M'dx + Ldx = o$, Ldx etant la constante ajoutée

a l'intégrale. Or cette derniere equation s'intégre facilement par la formule de l'Article CCCLXXXII. On aura donc X, dès qu'on aura K'. Ainsi on peut dire generalement que toutes les fois qu'il ne manquera a l'equation $Edx^2 + Fdxdy + Gdy^2 + Hddy = o$ qu'un facteur composé de x, de y, & de constantes pour être une différentielle complette, cette equation sera toujours reductible a une equation différentielle du premier ordre, quelles que soient d'ailleurs E, F, G, H.

Mais si, aprés la substitution de la valeur de M dans l'equation $\frac{(d.MF)}{dx}$ &c., l'equation renferme encore des y, que l'on ne puisse faire disparoitre sans assujettir les coefficiens E, F, G, H a certaines conditions; c'est une preuve que le facteur M doit de plus renfermer des dx & des dy. Alors il faut avoir recours a la methode generale (Article CCCCXLVII.). On s'y prendra de même pour trouver dans quels cas toute equation différentielle du second ordre, d'une forme connuë, peut-être intégrée par la multiplication d'un facteur composé de x, y, & constantes, ou de x, dy, & constantes, ou de y, dx, & constantes &c.

CCCCL.

A l'egard des equations différentielles du troisieme ordre, en les supposant representées generalement par

$Ad^3y + B = o$, A & B etant des fonctions de x, y, dx, dy, ddy, & constantes; & ſuppoſant de plus que M eſt le facteur compoſé de x, y, dx, dy, ddy, & conſtantes, qui peut la rendre intégrable, on pourra l'ecrire ainſi $AMd^3y + M\frac{B-K}{ddy}ddy + M.\frac{K-H}{dy}.dy + \frac{MH}{dx}.dx = o$; alors il faudra que $\frac{(d.AM)}{dy} = \frac{\left(d.M\frac{B-K}{ddy}\right)}{d^3y}$; $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{\left(d.M\frac{K-H}{dy}.dy\right)}{d^3y}$; $\frac{(d.AM)}{dx} = \frac{\left(d.\frac{MH}{dx}\right)}{d^3y}$; $\frac{\left(d.M\frac{B-K}{ddy}\right)}{dy} = \frac{\left(d.M\frac{K-H}{dy}\right)}{ddy}$; $\frac{\left(d.M\frac{B-K}{ddy}\right)}{dx} = \frac{\left(d.\frac{MH}{dx}\right)}{ddy}$; $\frac{\left(d.M\frac{K-H}{dy}\right)}{dx} = \frac{\left(d.\frac{MH}{dx}\right)}{dy}$. C'eſt a l'aide de ces equations qu'on determinera K, H, & M. On voit comment on doit s'y prendre, pour les equations différentielles d'ordres plus elevées.

CCCCLI.

REMARQUE. Le calcul intégral va de pair avec le calcul différentiel, lorſque les différentielles qu'on ſe propoſe d'intégrer ſont complettes. Car la regle generale du calcul différentiel peut s'exprimer ainſi: « Différentiéz la quantité propoſée ſucceſſivement par rapport » a chaque variable qu'elle contient, comme ſi toutes

„ les autres variables etoient constantes: prenéz ensuite la „ somme de toutes les différentielles particulieres, que „ vous aurez trouvé de cette maniere, cette somme sera „ la différentielle totale de la quantité proposée, soit que „ cette quantité ne contienne que des variables finies, „ soit qu'elle renferme des différences quelconques. " On deduit de là par l'Article CCCXXXIII. la regle generale pour intégrer toute différentielle complette, de quelqu'ordre qu'elle soit, & quelque nombre de variables qu'elle contienne. La voici: " Marquéz les va„ riables, dont les différences se trouvent dans la diffé„ rentielle proposée: rassembléz dans une somme totale „ tous les termes affectés de la différence d'une même „ variable, en commençant par ceux, où se trouve la „ différence de l'ordre le plus elevé: ensuite intégréz cet„ te somme, comme si toutes les autres variables etoient „ constantes: aprés quoi différentiéz l'intégrale, que vous „ venéz de trouver, en faisant varier successivement tou„ tes les variables qu'elle renferme: puis retranchéz cette „ différentielle de la proposée. S'il ne reste rien, l'inté„ grale trouvée sera celle que vous cherchiez, en lui a„ joutant une constante de son ordre. S'il y a un reste, „ il ne renfermera pas la variable, par rapport a laquelle „ vous avez intégré. Suivéz a l'egard de ce reste le „ même procedé, dont vous vous êtés servi a l'egard de „ toute la différentielle proposée, regardant ce reste com-

„ me

„ me une autre différentielle proposée, & ainsi de suite „ par rapport a chaque variable. Vous trouveréz de cet- „ te maniere l'intégrale de toute la proposée, si elle est „ complette; c'est a dire, qu'elle sera reduite a la diffé- „ rentielle d'un ordre inférieur d'un degré, d'où elle etoit „ venuë par la différentiation." Nous avons donné plusieurs exemples de cette regle pour les différentielles du premier ordre dans l'Article CCCXXXIII.; nous en ajouterons un icy pour les différentielles du second ordre, aprés avoir observé que par cette regle generale on peut toujours trouver, si une différentielle quelconque dans l'etat où elle se trouve est complette, ou non. Car, si elle est complette, on en trouvera facilement l'intégrale; par consequent, si on ne peut pas en trouver l'intégrale, c'est une preuve qu'elle n'est pas complette, & alors si cette différentielle est en equation, ou si elle est supposée egale a zero, il faudra chercher par les methodes connuës le facteur qui la rendra complette, si la chose est possible.

EXEMPLE. Soit proposée la différentielle $x^3 y^2 ddy + 2x^2 y dx dy + 2x^3 y dy^2 + 2xy^2 dx^2 + 3x^2 y^2 dy dx$, dans laquelle on suppose dx constante. On doit considerer cette différentielle comme renfermant trois variables dy, y, & x, puisque ddy, dy, & dx sont les différences premieres de dy, de y, & de x. Le terme où se trouve la différentielle de l'ordre le

plus elevé eſt $x^3 y^2 ddy$, dont on prendra l'intégrale en regardant dy comme la ſeule variable, & les autres y & x comme conſtantes. Cette intégrale eſt $x^3 y^2 dy$, dont la différentielle, en faiſant tout varier, eſt $x^3 y^2 ddy + 2x^3 y dy^2 + 3y^2 x^2 dx dy$, laquelle, etant retranchée de la propoſée, laiſſe pour reſte $2x^2 y dx dy + 2xy^2 dx^2$. Regardant ce reſte comme une autre différentielle propoſée a deux variables y & x, on prendra l'intégrale du terme $2x^2 y dx dy$ en ne faiſant varier que y, &, par ce que dx eſt conſtante, on aura l'intégrale $x^2 y^2 dx$, dont la différentielle, en faiſant varier x & y, eſt $2x^2 y dx dy + 2y^2 x dx dy$; on voit qu'en retranchant cette différentielle du premier reſte, il ne reſte plus rien. Donc l'intégrale cherchée ſera $x^3 y^2 dy + x^2 y^2 dx + C dx$, en ajoutant la conſtante du même ordre $C dx$. On auroit trouvé la même intégrale en ſe ſervant, dans le reſte $2x^2 y dx dy + 2y^2 x dx dy$, du terme $2y^2 x dx dy$ au lieu du terme $2x^2 y dx dy$, ou en intégrant tout le reſte $(2x^2 y dy + 2y^2 x dx) dx$ dans la ſuppoſition de x ſeule variable.

Il nous reste maintenant a faire quelques remarques sur les equations différentielles, qui ont besoin d'un facteur pour être complettes. Si on suppose x, y les deux variables d'une equation différentielle, & qu'en faisant dx constante, on prenne, comme cy-devant $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, $dr = sdx$, &c., les equations différentielles de tous les degrés pourront être ramenées aux formes suivantes

I.er Degré... $p = \varphi(x, y)$;

II.e Degré... $q = \varphi(x, y, p)$;

III.e Degré... $r = \varphi(x, y, p, q)$ &c.

L'expression φ designe des fonctions quelconques des quantités renfermées entre les parentheses. S'il s'agit de trouver un facteur, qui rende complette une equation différentielle du second degré, ce facteur pourra être representé par q, de même que p est le facteur des différentielles du premier ordre. Mais il faut observer que ce facteur peut être une fonction des deux variables seulement, ou qu'il peut encore renfermer le rapport des différentielles $\frac{dy}{dx}$; ce qui rend quelquefois selon les différens cas l'intégration plus ou moins difficile. Il est bien clair que le cas le plus aisé est celui où le facteur est une fonction d'une seule variable. On voit bien que P, Q, R, S, T, &c. designant des fonctions quelconques des variables x, y, on pourra

avoir différens ordres de facteurs pour les seules equations différentielles du second degré.

I.er Ordre .... P;

II.e Ordre .... $Pdx + Qdy$;

III.e Ordre .... $Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2$ &c.

On pourroit continuer ces ordres plus loin; mais on entreroit alors dans des calculs fort embaraſſants. Les cas les plus ſimples ſont ceux, dans leſquels le rapport des différentielles $\frac{dy}{dx}$ eſt de dimenſion nulle, ou du premier, ou ſecond degré. Le facteur peut être affecté de quantités fractionaires, irrationelles, ou tranſcendantes, dont nous avons deja donné des Exemples.

Toute différentielle du ſecond ordre $q = \varphi(x, y, p)$, dans laquelle dx eſt ſuppoſée conſtante, ſe reduit a cette forme $ddy = dx^2 . \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$. Or etant propoſée une différentielle quelconque du ſecond degré, qui ne ſoit pas une différentielle complette, on eſſayera d'abord le facteur de la premiere forme P, s'il ne reuſſit pas, on prendra le facteur de la ſeconde forme, & ainſi de ſuite.

Soit, par exemple, la différentielle du ſecond degré $2ayddy - 4ady^2 - y^{n+5}dx^2(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} = o$, dans laquelle dx eſt ſuppoſée conſtante. Aprés avoir

eprouvé que le facteur du premier ordre ne peut reussir, on employera $Pdx + Qdy$, & l'equation proposée etant d'abord mise sous cette forme $2addy - \frac{4ady^2}{y} - y^{n+4}dx^2(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} = o$, on la multipliera ensuite par le facteur $Pdx + Qdy$, & elle deviendra $2aPdxddy - \frac{4aPdxdy^2}{y} - Py^{n+4}dx^3(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} + 2aQdyddy - \frac{4aQdy^3}{y} - Qy^{n+4}dx^2dy(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} = o$; laquelle doit être integrable par la supposition. Or, si on examine les deux termes $2aPdxddy + 2aQdyddy$, on voit aisément qu'ils ne peuvent provenir que de la différentiation de $2aPdxdy + aQdy^2$. On pourra donc regarder $2aPdxdy + aQdy^2$ comme la premiere partie de l'intégrale cherchée. Maintenant, si l'on prend la différentielle de cette premiere partie, on aura, en l'ôtant de la proposée, & ordonnant l'equation, $-Py^{n+4}dx^3(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} - Qy^{n+4}dx^2dy(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{4aPdxdy^2}{y} - \frac{4aQdy^3}{y} - 2adx^2dy\frac{(dP)}{dx} - 2adxdy^2\frac{(dP)}{dy} - ady^3\frac{(dQ)}{dy} -$

$adxdy^2 \frac{(dQ)}{dx} = o$. On a ſubſtitué dans cette derniere equation a la place de dP l'expreſſion $dx\frac{(dP)}{dx} + dy\frac{(dP)}{dy}$, & a la place de dQ la valeur $dx\frac{(dQ)}{dx} + dy\frac{(dQ)}{dy}$. L'expreſſion $dx\frac{(dP)}{dx}$ ſignifie la différentielle de P en faiſant varier x ſeulement, & $dy\frac{(dP)}{dy}$ repreſente la différentielle de P en conſiderant y ſeule comme variable, & par conſequent la différentielle totale eſt compoſée de deux. On dira la même choſe de la différentielle de Q. Or ſi, on examine la différentielle precedente, on voit qu'a cauſe de dx conſtante, elle ne peut être intégrable, a moins que les termes affectés de dy^3, & dy^2 ne ſe detruiſent reſpectivement; donc $\frac{4aQdy^3}{y} + ady^3\frac{(dQ)}{dy} = o$, & $\frac{4aPdxdy^2}{y} + 2adxdy^2\frac{(dP)}{dy} + adxdy^2\frac{(dQ)}{dx} = o$, d'où l'on tire $\frac{4Q}{y} + \frac{(dQ)}{dy} = o$, ou $4Qdy + ydy\frac{(dQ)}{dy} = o$, & $\frac{4P}{y} + 2\frac{(dP)}{dy} + \frac{(dQ)}{dx} = o$. Maintenant pour tirer la valeur de Q de la premiere equation, nous conſidererons x comme conſtante, & on aura $dy\frac{(dQ)}{dy} = dQ$; puiſ-

que $dy\frac{(dQ)}{dy}$ signifie la différentielle de Q en ne faisant varier que y. Donc, a cause de $4Qdy + ydQ = o$, on aura, en intégrant, $Qy^4 = K$ fonction de x seulement, & par consequent $Q = \frac{K}{y^4}$, & $\frac{(dQ)}{dx} = \frac{1}{y^4}\frac{(dK)}{dx}$; d'où l'on voit que $\frac{(dK)}{dx}$ est une fonction de x. De plus, en considerant x aussi comme constante dans l'equation $\frac{4P}{y} + 2\frac{(dP)}{dy} + \frac{(dQ)}{dx} = o$, on aura $4Pdy + 2ydP + \frac{dy}{y^3}.\frac{(dK)}{dx} = o$, & en multipliant par y, & intégrant, nous aurons $2Pyy - \frac{1}{y}.\frac{(dK)}{dx} = 2L$, L etant une fonction de x seulement, d'où l'on tire $P = \frac{L}{yy} + \frac{1}{2y^3}.\frac{(dK)}{dx}$. Mais $\frac{(dP)}{dx} = \frac{1}{yy}.\frac{(dL)}{dx} + \frac{1}{2y^3}\frac{(ddK)}{dx^2}$, donc, en substituant & effaçant les termes qui se detruisent, on aura l'autre partie de l'intégrale $-dx^2.S.\{(1+xx)^{\frac{n-1}{2}}(Ly^{n+2}dx + \frac{1}{2}y^{n+1} \times dx\frac{(dK)}{dx} + Ky^n dy)\} - 2adx^2.S.\left(\frac{dy}{yy}.\frac{(dL)}{dx} + \frac{dy}{2y^3}.\frac{(ddK)}{dx^2}\right)$ cette quantité etant composée de deux parties, dont l'une est multipliée par $-dx^2$, & l'autre par $-2adx^2$,

si, faisant abstraction du facteur $-dx^2$, on fait dans la premiere $L=o$, sa différentielle se reduira $aKy^n dy(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{2}y^{n+1}dx\frac{(dK)}{dx}(1+xx)^{\frac{n-1}{2}}$, dont l'intégrale sera $\frac{Ky^{n+1}}{n+1}(1+xx)^{\frac{n-1}{2}}$; il ne faut pour cela que faire la différentielle $\frac{y^{n+1}dK}{n+1}(1+xx)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{(n-1)Ky^{n+1}xdx}{n+1} \times (1+xx)^{\frac{n-3}{2}} = \frac{1}{2}y^{n+1}dK(1+xx)^{\frac{n-1}{2}}$, c'est a dire; $2(n-1)Kxdx=(n-1)dK(1+xx)$; d'où l'on tire $K=1+xx$, de sorte que le premier membre de l'intégrale precedente sera $-\frac{1}{n-1}y^{n+1}dx^2(1+xx)^{\frac{n+1}{2}}$, & l'autre membre, a cause de $L=o$, & de $\frac{(ddK)}{dx^2}=2$, deviendra $-2adx^2 . S.\frac{dy}{y^3}=\frac{adx^2}{yy}$; donc la seconde partie de l'integrale sera $-\frac{1}{n+1}y^{n+1}dx^2(1+xx)^{\frac{n+1}{2}} + \frac{adx^2}{yy}$. De plus, puisque $L=o$, & $K=1+xx$, on aura $\frac{(dK)}{dx}=2x$, d'où l'on tire $P=\frac{x}{y^3}$ & $Q=\frac{1+xx}{y^4}$. Donc la

la premiere partie de l'intégrale ſera $\frac{2axdxdy}{y^3} + \frac{a(1+xx)dy^2}{y^4}$, & par conſequent l'intégrale complette, en ajoutant la conſtante Cdx^2, ſera $\frac{adx^2}{y} + \frac{2axdxdy}{y^3} + \frac{a(1+xx)dy^2}{y^4} - \frac{1}{n+1} y^{n+1} dx^2 (1+xx)^{\frac{n+1}{2}} = Cdx^2$, & en multipliant par y^4, on aura $\frac{1}{n+1} y^{n+5} dx^2 (1+xx)^{\frac{n+1}{2}} = a(yydx^2 + 2xydxdy + (1+xx)dy^2) - Cy^4dx^2$.

Si dans l'equation différentielle propoſée on ſuppoſoit $n = -2$, elle ſe changeroit en celle-cy $2ayddy - 4ady^2 - y^3dx^2(1+xx)^{-\frac{3}{2}} = 0$. Dans laquelle le facteur ſimple $P = \frac{1}{y^3}$ ſuffiroit pour la rendre différentielle complette; & en multipliant l'equation par ce facteur, elle deviendroit $\frac{2ayddy - 4ady^2}{y^3} - \frac{dx^2}{(1+xx)\sqrt{1+xx}} = 0$, dont l'intégrale, en ajoutant la conſtante αdx, devient $\frac{2ady}{yy} - \frac{xdx}{\sqrt{1+xx}} = \alpha dx$, &, en

intégrant de nouveau, on aura $-\frac{2a}{y} - \sqrt{1+xx} = ax + b$. Ce cas particulier n'a aucune difficulté, & il eſt le ſeul, dans lequel le facteur ſimple P puiſſe reuſſir. Mais ſi on conſideré l'expoſant quelconque n, on voit que ces ſortes de cas deviennent très-compliqués, & que leur ſolution depend beaucoup de l'adreſſe & de la ſagacité du Calculateur.



CHAPITRE VI.

De quelques methodes particulieres pour intégrer, ou pour reduire aux ordres inférieurs les equations différentielles des ordres supérieurs, lorsqu'elles ont certaines conditions.

CCCCLII.

LEs equations différentielles a deux variables x & y, de quelqu'ordre qu'elles soient, peuvent souvent s'intégrer, ou se reduire a un ordre inférieur, en supposant le rapport $\frac{dx}{dy}$, ou $\frac{dy}{dx}$ egal a une nouvelle variable z, en substituant dans l'equation proposée zdy au lieu de dx, ou zdx au lieu de dy. Lorsque la variable finie x ne se trouve point dans l'equation proposée, on suppose $dx = zdy$; & si c'est la variable finie y, qui manque, on fait $dy = zdx$. Si l'equation proposée contient des différences supérieures ddy, d^3y, d^4y, &c., & que dx soit constante, on suppose $dy = zdx$, d'où l'on tire $ddy = dzdx$, $d^3y = ddzdx$, $d^4y = d^3zdx$, &c. Si au contraire l'equation proposée contient des différences supérieures ddx, d^3x, d^4x,

&c., dy etant conſtante, on fait $dx = zdy$, d'où l'on tire $ddx = dzdy$, $d^3x = ddzdy$, $d^4x = d^3zdy$, &c. On va voir l'uſage de ces methodes dans les Problemes ſuivants.

CCCCLIII.

PROBLEME I. Intégrer l'equation différentielle a deux variables $Ady^n + Bdx^n + Cdy^m dx^{n-m} + Ddy^p dx^{n-p} + Edy^q dx^{n-q} +$ &c. $= 0$, dans laquelle les coefficients A, B, C, D, E, &c. ſont des fonctions quelconques d'une ſeule variable x, ou y, & de conſtantes, ou zero, & les expoſans m, n, p, q, &c. des nombres quelconques.

SOLUTION. CAS I. Lorſque la variable x ne ſe trouve point dans l'equation propoſée, ou que les coefficients A, B, C, D, E, &c. ſont des fonctions de la ſeule variable y, & de conſtantes, ou zero. On ſuppoſera ſuivant la regle $dx = zdy$, d'où l'on tirera $dx^n = z^n dy^n$, $dx^{n-m} = z^{n-m} dy^{n-m}$, $dx^{n-p} = z^{n-p} \times dy^{n-p}$ &c. Subſtituant ces valeurs dans la propoſée, & diviſant par dy^n, on aura l'equation finie a deux variables z & y, $A + Bz^n + Cz^{n-m} + Dz^{n-p} +$

$E z^{n-q} + \&c. = o$, par laquelle on determinera la valeur de z en y, ou celle de y en z, & en constantes. On substituera une de ces deux valeurs dans la différentielle $z\,dy$, & on aura $z\,dy = Y\,dy$, ou $z\,dy = Z\,dz$, Y etant une fonction de y & de constantes, & Z une fonction de z & de constantes, & l'equation $dx = z\,dy$ sera changée en $dx = Y\,dy$, ou $dx = Z\,dz$. On intégrera de côté & d'autre par les regles de la premiere Partie du Calcul Intégral, & on aura $x = S.Y\,dy + Q$ constante, ou $x = S.Z\,dz + Q$. La premiere intégrale donnera immediatement la valeur de x en y, qu'on vouloit trouver. Si on se sert de la seconde intégrale $x = S.Z\,dz + Q$, on trouvera encore la valeur de x en y, en comparant cette equation avec l'autre $A + B z^n + C z^{n-m} + D z^{n-p} + E z^{n-q} + \&c. = o$, puisque ces deux equations ne contiennent que les trois variables ou inconnuës x, z, & y. C. Q. F. T.

CAS II. Lorsque la variable y manque dans l'equation différentielle proposée, ou que les coefficients A, B, C, D, &c. sont des fonctions de la seule variable x, & de constantes, ou zero. On supposera $dy = z\,dx$, d'où l'on tirera $dy^n = z^n dx^n$, $dy^m = z^m dx^m$, &c. substituant ces valeurs dans la proposée, & divisant par dx^n, on aura l'equation finie $A z^n + B + C z^m + D z^p$

$+Ez^q+$ &c. $=o$, par laquelle on determinera la valeur de z en x, ou celle de x en z, on substituera une de ces valeurs dans la différentielle zdx, & en procedant comme dans le premier cas, on trouvera la valeur de x en y, au moyen de l'equation $dy=zdx$. C. Q. F. T.

CCCCLIV.

PROBLEME II. Intégrer ou reduire au premier ordre l'equation generale du second ordre a deux variables $Addy+Bdy^2+Cdxdy+Ddx^2=o$, dans laquelle dx est constante, & les coefficients A, B, C, D sont des fonctions quelconques de l'une des deux variables x, ou y, & de constantes, ou zero.

SOLUTION I. Puisque dx est constante, on supposera, suivant la regle, $dy=zdx$, d'où l'on tirera $ddy=dzdx$, $dy^2=z^2dx^2$, & $dxdy=zdx^2$. Substituant ces valeurs dans l'equation proposée & divisant par dx, on aura $Adz+Bz^2dx+Czdx+Ddx=o$, equation différentielle du premier ordre a deux variables z & x, lorsque y manque dans la proposée. Si c'est x qui manque dans l'equation proposée, on substituera $\frac{dy}{z}$ au lieu de dx dans l'equation du premier ordre qu'on vient de trouver, elle deviendra $Adz+Bzdy+Cdy+\frac{Ddy}{z}$,

ou, en multipliant par z, $Azdz + Bz^2dy + Czdy + Ddy = o$, equation différentielle du premier ordre a deux variables z & y.

On cherchera l'intégrale de l'equation reduite au premier ordre par les regles que nous avons données pour intégrer les equations différentielles du premier ordre a deux variables, & on determinera par cette intégrale la valeur de z en x, ou en y, ou celle de x, ou de y en z. On ſubſtituera une de ces valeurs dans la différentielle zdx, & on ſeparera par ce moyen les variables dans l'equation $dy = zdx$, ou $\frac{dy}{z} = dx$, qu'on intégrera enſuite par les regles de la premiere Partie du Calcul Intégral, & on trouvera, comme dans le Probleme precedent, la valeur de x en y. C. Q. F. T.

SOLUTION II. Lorſque x manque dans l'equation propoſée, on peut ſuppoſer $dx = zdy$. Car, puiſque dx eſt conſtante, on aura, en différentiant, $o = zddy + dzdy$; par conſequent $ddy = -\frac{dzdy}{z}$, & en ſubſtituant cette valeur, & zdy au lieu de dx dans la propoſée, on aura $-\frac{Adzdy}{z} + Bdy^2 + Czdy^2 + Dz^2dy^2 = o$, ou, en diviſant par dy, & multipliant par z, $-Adz + Bzdy + Cz^2dy + Dz^3dy = o$, equa-

tion différentielle du premier ordre a deux variables z & y. En intégrant cette equation, on trouvera la valeur de z en y, ou celle de y en z, & substituant une de ces deux valeurs dans l'equation $dx = z dy$, on trouvera l'intégrale $x = S. z dy + Q$ constante, par où l'on determinera la valeur de x en y, comme dans le Probleme premier.

CCCCLV.

COROLLAIRE. Il est aisé de voir que l'intégration se fera de la même maniere, & par les mêmes substitutions, lorsque l'equation proposée dans le Probleme second aura dans tous ses termes des puissances quelconques de dx, ou de dy, ou leurs produits; bien entendù que toutes les différentielles soient homogènes dans tous les termes.

On peut quelquefois se servir des mêmes methodes, quoique dans les equations différentielles a deux variables x & y, la constante ne soit ny dx, ny dy, mais une fonction, comme $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ou comme $y dx$; on va le voir dans les Exemples suivants.

CCCCLVI.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'equation $Ydydu = 2aydd x + adxdy$, dans laquelle Y est une fonction quel-

quelconque de y & de conſtantes, & du eſt ſuppoſée conſtante & egale a $\sqrt{dx^2+dy^2}$. On voit, que les deux variables finies x & u manquant dans cette equation, & du etant conſtante, on ſuppoſera $dx=zdu$, ce qui donne $ddx=dzdu$, & par ſubſtitution $Ydydu = 2aydzdu+azdydu$, &, en diviſant par du, $Ydy=2aydz+azdy$, equation différentielle du premier ordre a deux variables z & y. Le facteur qui rend cette equation complette eſt $\frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}}$; car en la multipliant par ce facteur, ou en la diviſant par $2y^{\frac{1}{2}}$, elle devient $\frac{Ydy}{2y^{\frac{1}{2}}} = \frac{2aydz+azdy}{2y^{\frac{1}{2}}}$, dont l'intégrale eſt $S.\frac{Ydy}{2y^{\frac{1}{2}}}+Q$ conſtante $=azy^{\frac{1}{2}}$, d'où l'on tire $z=Y'$, Y' etant une fonction de y & de conſtantes $= \frac{S.\frac{Ydy}{2y^{\frac{1}{2}}}+Q}{ay^{\frac{1}{2}}}$. Or puiſque $du=\sqrt{dx^2+dy^2}$, & que $dx=zdu$, on aura $dx^2=z^2du^2=z^2dx^2+z^2dy^2$, & $dx=\frac{zdy}{\sqrt{1-zz}}=\frac{Y'dy}{\sqrt{1-Y'^2}}=Y''dy$, en ſup-

posant que Y'' est une fonction de y, & de constantes $= \frac{Y'}{\sqrt{1-Y'^2}}$. On trouvera donc l'intégrale $x = S.Y''dy$ par les regles de la premiere Partie du Calcul Intégral.

CCCCLVII.

EXEMPLE II. Soit proposé d'intégrer l'equation $Yy^2 dy dx^2 + du ddu = o$, dans laquelle Y est une fonction de y & de constantes, $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, & la différentielle ydx constante. On voit que les deux variables finies u & x manquent dans cette equation; & par ce que ydx est constante, on supposera $du = zydx$, d'où l'on tire $ddu = ydxdz$, & par substitution $Yy^2 dy dx^2 + y^2 z dz dx^2 = o$, $Ydy = -zdz$, &, en intégrant, $S.Ydy = -\frac{zz}{2} + Q$ constante. Or $z = \frac{du}{ydx}$, $z^2 = \frac{du^2}{y^2 dx^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2 dx^2}$; on aura donc $S.Ydy = Q - \left(\frac{dx^2 + dy^2}{2y^2 dx^2}\right)$, $2y^2 dx^2 . S.Ydy = 2Qy^2 dx^2 - dx^2 - dy^2$, $dy^2 = (2Qy^2 - 1 - 2y^2 . S.Ydy) dx^2$, & $dx = \frac{dy}{\sqrt{2Qy^2 - 1 - 2y^2 . S.Ydy}}$; equation intégrable par les regles de la premiere Partie du Calcul Intégral.

CCCCLVIII.

EXEMPLE III. On propose d'intégrer l'equation $Yy^3dydx^3 = dxdydu^2 + ydu^2ddx - ydxduddu$, dans laquelle Y est une fonction quelconque de y, & de constantes, & dx ou du peut être prise pour constante.

Si on prend dx pour constante, on aura $ddx = o$, le terme ydu^2ddx disparoitra, & l'equation deviendra $Yy^3dydx^2 = dydu^2 - yduddu$, dans laquelle x, & u manquent. On supposera donc $du = zdx$; ce qui donne $ddu = dzdx$, &, par substitution, $Yy^3dydx^2 = z^2dydx^2 - yzdzdx^2$, ou $Yy^3dy = z^2dy - yzdz$. Divisant par y^3, on aura $Ydy = z^2y^{-3}dy - y^{-2}zdz$, &, en intégrant de côté & d'autre, $S.Ydy = -\frac{1}{2}z^2y^{-2} + Q$ constante, &, en mettant pour z sa valeur, $\frac{du}{dx}$, on aura $S.Ydy = Q - \frac{du^2}{2y^2dx^2}$.

Si on prend du pour constante, on aura $ddu = o$, le terme $ydxduddu$ disparoitra, & l'equation proposée deviendra $Yy^3dydx^3 = dxdydu^2 + ydu^2ddx$. Supposant $dx = zdu$, on aura $ddx = dzdu$, & par substitution $Yy^3dy.z^3du^3 = zdydu^3 + ydzdu^3$, ou bien Ydy

$=\frac{zdy+ydz}{y^3z^3}$. Donc, en intégrant, on a $S.Ydy=-\frac{1}{2y^2z^2}+Q$ conſtante & en remettant pour z ſa valeur $\frac{dx}{du}$, l'intégrale cherchée eſt $S.Ydy=Q-\frac{du^2}{2y^2dx^2}$; comme auparavant.

CCCCLIX.

PROBLEME III. Intégrer l'equation différentielle du troiſieme ordre $Adx^3+Bdyddy+Cdxddy+Ddy^3+Edxdy^2+Fdx^2dy+Gdx^3=o$, dans laquelle dx eſt conſtante, & les deux variables finies x & y ne ſe trouvent pas, c'eſt a dire, que les coefficients A, B, C, D, E, &c. ſont tous conſtans, ou zero.

SOLUTION. En ſuppoſant ſuivant la regle $dy=zdx$, on aura $ddy=dzdx$, $d^3y=ddzdx$; & par ſubſtitution & diviſant par dx, la propoſée deviendra $Addz+Bzdzdx+Cdxdz+Dddz+Ez^2dx^2+Fzdx^2+Gdx^2=o$, equation du ſecond ordre a deux variables z & x, dans laquelle la variable finie x ne ſe trouve point. On trouvera donc par le Probleme II. l'intégrale de cette equation, par laquelle on deter-

minera la valeur de z en x, & en conſtantes, ou celle de x en z. On ſubſtituera une de ces valeurs dans la différentielle zdx, & on intégrera l'equation $dy = zdx$, dans laquelle les variables ſont ſeparées. Enfin procedant comme dans le Probleme I. on trouvera la valeur de y en x & conſtantes, ou celle de x en y. *C. Q. F. T.*

CCCCLX.

Corollaire. On intégrera de la même maniere, & par les mêmes ſubſtitutions, lorſque les puiſſances quelconques de dx, dy, ddy, ou leurs fonctions ſe trouveront dans quelque terme que ce ſoit de l'equation propoſée.

Exemple. On propoſe d'intégrer l'equation $dy\,ddy\,d^3y + 2dx\,dy\,ddy^2 - dx^2dy^4 - 3dx^6 = o$, dans laquelle dx eſt conſtante, & où les deux variables finies x & y ne ſe trouvent point. On ſuppoſera donc $dy = zdx$, d'où l'on tirera $ddy = dzdx$, $d^3y = ddzdx$, & par ſubſtitution $zdzddzdx^3 + 2zdz^2 \times dx^4 - z^4dx^6 - 3dx^6 = o$, & en diviſant par dx^3, $zdzddz + 2zdz^2dx - z^4dx^3 - 3dx^3 = o$, equation a deux variables x & z, dans laquelle dx eſt conſtante,

où la variable x ne se trouve pas, & qu'on intégrera (Art. CCCCLV.) en faisant $dz = udx$. Car cette supposition donnera $ddz = dudx$, $zdzddz = zududx^2$, &c., & en substituant & divisant par dx^2, la derniere equation deviendra $zudu + 2zu^2dx - z^4dx - 3dx = o$, ou bien, en remettant $\frac{dz}{u}$ au lieu de dx, $zu^2du + 2u^2zdz - z^4dz - 3dz = o$, equation du premier ordre a deux variables z & u, dont on cherchera l'intégrale par les regles que nous avons données pour cette sorte d'equations. Cette intégrale donnera la valeur de u en z & constantes, qu'on substituera dans l'equation $dz = udx$, ou $\frac{dz}{u} = dx$, & en intégrant par les regles de la premiere Partie du Calcul Intégral, on trouvera la valeur de z en x. On substituera cette valeur de z dans l'equation $dy = zdx$, & en intégrant on trouvera la valeur de y en x & constantes.

CCCCLXI.

PROBLEME IV. Intégrer l'equation du troisieme ordre $Ad^3y + Bdxddy + Cdx^3 = o$, dans laquelle dx est constante, & les coefficients A, B, C sont des fonctions quelconques de la seule variable x & de constantes, ou zero.

SOLUTION. Suppoſant $dy = zdx$, & ſubſtituant $ddzdx$ au lieu de d^3y, & $dzdx$ au lieu de ddy, la propoſée devient $Addz + Bdzdx + Cdx^2 = 0$, equation du ſecond ordre a deux variables z & x, dans laquelle dx eſt conſtante, & où la variable finie z ne ſe trouve point. On cherchera donc par le Probleme II. la valeur de z en x, ou celle de x en z, & ſubſtituant une de ces valeurs dans la différentielle zdx, on trouvera, en intégrant l'equation $dy = zdx$, la valeur de y en x, comme dans les Problemes precedents.

CCCCLXII.

COROLLAIRE. L'intégration ſe fera de la même maniere, & par les mêmes ſubſtitutions, lorſque les puiſſances quelconques de dx & de ddy, où leurs fonctions ſe trouvent dans quelque terme que ce ſoit de l'equation propoſée, pourvû que dy & ſes puiſſances n'y ſoient pas.

CCCCLXIII.

PROBLEME V. Intégrer l'equation différentielle du quatrieme ordre a deux variables $Ad^4y + Bdxd^3y + Cdx^2ddy + Ddx^4 = 0$, dans laquelle dx eſt conſtante, & les coefficients A, B, C, D ſont auſſi conſtans,

ou zero; c'eſt a dire, que les deux variables finies x, & y, & la premiere différence dy, avec ſes puiſſances, ne s'y trouvent point.

SOLUTION. Suppoſant $dy = z dx$, & ſubſtituant $d^3 z dx$ pour $d^4 y$, $d^2 z dx$ pour $d^3 y$, & $dz dx$ pour ddy, la propoſée devient $Ad^3 z + Bddz dx + Cdz dx^2 + Ddx^3 = o$, equation du troiſieme ordre a deux variables z & x, dans laquelle dx & les coefficients A, B, C, D ſont conſtans. On intégrera donc cette equation par le Probleme III., & on aura la valeur de z en x, ou celle de x en z; ſubſtituant enſuite une de ces valeurs dans la différentielle $z dx$, on trouvera, comme dans les Problemes precedents, la valeur de y en x, en intégrant l'equation $dy = z dx$, ou $\frac{dy}{z} = dx$. *C. Q. F. T.*

CCCCLXIV.

On peut appliquer cette methode aux equations différentielles a deux variables du cinquieme ordre, dans le cas où les deux variables finies x & y, & les différences dy, & ddy avec leurs fonctions manquent, dx etant conſtante. On peut paſſer de là aux equations différentielles des autres ordres ſupérieurs, & trouver les equations neceſſaires pour les rendre intégrables.

Parmi

Parmi les equations qui ne ſont pas ſuſceptibles de la methode precedente, par ce que les deux variables finies s'y trouvent, il y en a quelques unes qu'on y peut remaner en prenant pour conſtante une différentielle, telle que tous les termes affectés de l'une des deux variables finies diſparoiſſent, & qu'il ne réſte que ceux qui contiennent l'autre. L'equation $dx^3 - dxdy^2 = ydxddx + 2xdyddy$, dans laquelle on peut prendre dx, ou dy pour conſtante, eſt dans ce cas. Car ſi on ſuppoſe dx conſtante, on aura $ddx = o$, le terme $ydxddx$ diſparoitra, & l'equation deviendra $dx^3 - dxdy^2 = 2xdyddy$, dans laquelle la variable finie y ne ſe trouve pas. Si on ſuppoſe dy conſtante, le terme $2xdyddy$ diſparoitra, & on aura $dx^3 - dxdy^2 = ydxddx$, ou $dx^2 - dy^2 = yddx$, equation dans laquelle la variable finie x manque.

Pluſieurs autres cas ſe rameneront facilement a la methode precedente par de ſimples ſubſtitutions. Par exemple, ſi dans l'equation $x^m ddx = yddy + dy^2 + y^2 dy^2$, on ſuppoſe $ydy = dz$, ou $\frac{1}{2} yy = z$, on aura $yddy + dy^2 = ddz$, $y^2 dy^2 = dz^2$, & en ſubſtituant $x^m ddx = ddz + dz^2$, equation dans laquelle la variable finie z ne ſe trouve pas.

Mais nous allons expliquer une methode fondée sur les principes du Calcul Exponentiel, par laquelle on pourra transformer un grand nombre d'equations différentielles, qui renferment leurs deux variables finies, en d'autres dans lesquelles l'une des deux ne se trouve pas.

CCCCLXV.

LEMME. Supposé que e soit le nombre dont le logarithme est l'unité, & que $x = e^{bu}$, b etant constante, & u variable, on aura $dx = be^{bu}du$, $ddx = be^{bu}(ddu + bdu^2)$, $d^3x = be^{bu}(d^3u + 3bduddu + bbdu^3)$, &c.

DEMONSTRATION. Puisqu'on suppose $x = e^{bu}$, & $L.e = 1$, on aura $L.x = L.e^{bu} = bu.L.e = bu$; &, en différentiant, $d.L.x = \frac{dx}{x} = bdu$; $dx = bxdu = be^{bu}du$; en prenant les secondes différences, $ddx = bxddu + bdxdu = be^{bu}ddu + bbe^{bu}du^2 = be^{bu}(ddu + bdu^2)$; en prenant les troisiemes différences, $d^3x = be^{bu}(d^3u + 2bduddu) + bbe^{bu}du(ddu + bdu^2) = be^{bu}(d^3u + 3bduddu + bbdu^3)$, & ainsi de suite. *C. Q. F. D.*

CCCCLXVI.

COROLLAIRE I. Si on ſuppoſe dx conſtante, on aura $ddx = o = be^{bu}(ddu + bdu^2)$; par conſequent $ddu = -bdu^2$.

CCCCLXVII.

COROLLAIRE II. Si on ſuppoſe $y = e^{ku}t$, k etant conſtante, & t variable, on aura $dy = e^{ku}(ktdu + dt)$, & $ddy = e^{ku}(ktddu + kktdu^2 + 2kdtdu + ddt)$. Car, puiſque $y = e^{ku}t$, on aura, en différentiant, $dy = t.d.e^{ku} + e^{ku}dt = kte^{ku}du + e^{ku}dt = e^{ku}(ktdu + dt)$; & en prenant les ſecondes différences, on trouve $ddy = e^{ku}.d(ktdu + dt) + (ktdu + dt)d.e^{ku} = e^{ku}(ktddu + kdtdu + ddt) + ke^{ku}du(ktdu + dt) = e^{ku}(ktddu + kktdu^2 + 2kdtdu + ddt)$.

CCCCLXVIII.

COROLLAIRE III. Si dans une equation différentielle a deux variables x & y, on ſuppoſe $x = e^{bu}$, & $y = e^{ku}t$, & qu'on ſubſtitue les valeurs qu'on tire de

ces deux ſuppoſitions au lieu des variables x, & y, & de leurs différences dx, dy, ddx, ddy, &c., l'equation ſera transformée dans une autre a deux variables u, & t, telle que la variable finie u ne ſe trouvera que dans les expoſans de e, ou dans les quantités exponentielles e^{bu}, e^{ku}; & ſi l'equation propoſée ne contient pas les premieres différences dx, dy, ou leurs puiſſances, & les ſecondes différences ddx, ddy, & qu'on faſſe diſparoitre toutes les quantités exponentielles dans l'equation transformée, elle deviendra une equation a deux variables u, & t, dans laquelle la variable finie u manquera, & qui ne contiendra que les premieres différences du, dt, & leurs puiſſances, & les ſecondes différences ddu, ddt; cette equation pourra s'intégrer alors (par le Probleme Art. CCCCLIII.). Nous allons faire voir dans les Problemes ſuivans, que cette methode reuſſit: 1.° Lorſque l'equation propoſée n'a que deux termes, & qu'elle eſt compriſe dans cette formule $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, dans laquelle dx eſt ſuppoſée conſtante: 2.° Lorſque la ſomme des expoſans des variables x & y, & de leurs différences premieres & ſecondes dx, dy; ddx, ddy eſt la même dans chaque terme de l'equation propoſée; car alors en ſuppoſant $x = e^u$, & $y = e^u t$, on pourra faire diſparoitre par la diviſion toutes les quantités exponentielles de l'equation transformée: 3.° Lorſque la ſomme des

expoſans de l'une des deux variables, par exemple de x, & de ſes différentielles, eſt la même dans chaque terme de l'equation propoſée; car alors en ſuppoſant cette variable $x = e^u$, on pourra encore faire diſparoitre par la diviſion les quantités exponentielles de la transformée.

CCCCLXIX.

PROBLEME VI. Intégrer les equations différentielles, telles que $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, dans laquelle dx eſt conſtante.

SOLUTION. Soit $x = e^{bu}$, & $y = e^{ku} t$; b & k ſont des conſtantes arbitraires, qu'on determinera dans la ſuite de l'operation. La ſuppoſition de $x = e^{bu}$ donne $x^m = e^{mbu}$; $dx = be^{bu} du$, $dx^p = b^p e^{pbu} du^p$; l'autre ſuppoſition de $y = e^{ku} t$ donne $y^n = e^{nku} t^n$; $dy = e^{ku} \times (ktdu + dt)$; $dy^{p-2} = e^{pku - 2ku} (ktdu + dt)^{p-2}$; $ddy = e^{ku} (ktddu + kktdu^2 + 2kdtdu + ddt)$; & par ce que dx eſt conſtante, on aura (CCCCLXVI.) $ddu = - bdu^2$, & en ſubſtituant pour ddu cette valeur dans celle de ddy, on trouve $ddy = e^{ku} (- kbtdu^2 + kktdu^2 + 2kdtdu + ddt) = e^{ku} (ddt + 2kdtdu + (kk - kb) \times$

tdu^2). En ecrivant toutes ces valeurs dans l'equation proposée, elle devient $ae^{mbu}b^p e^{pbu} du^p = e^{nku} t^n . \times e^{pku - 2ku}(ktdu + dt)^{p-2} . e^{ku}\{ddt + 2kdtdu + (kk - kb)tdu^2\}$; c'est a dire, $ab^p e^{mbu + pbu} du^p = e^{nku + pku - ku} t^n (ktdu + dt)^{p-2} (ddt + 2kdtdu + (kk - kb)tdu^2)$. Pour faire disparoitre les exponentielles de cette equation, on n'a qu'a les suppofer egales, & ensuite divifer, & on aura $mbu + pbu = nku + pku - ku$, ou $\frac{b}{k} = \frac{n+p-1}{m+p}$. On peut donc prendre le nombre qu'on voudra pour l'une des constantes indeterminées b, ou k, & determiner ensuite l'autre constante par l'equation que nous venons de trouver. Ainsi si l'on prend $b = n + p - 1$, somme des exposants de y, & de ses différences dans le terme $y^n dy^{p-2} ddy$, on aura $k = m + p$, somme des exposants de x, & de dx dans l'autre terme $ax^m dx^p$; si l'on prend $k = 1$, on aura $b = \frac{n+p-1}{m+p}$, &c. en divisant toute l'equation transformée par la quantité exponentielle, qu'on suppose presentement être la même dans les deux termes, cette equation devient $ab^p du^p = t^n (ktdu + dt)^{p-2}\{ddt + 2kdtdu + (kk - kb)tdu^2\}$, laquelle ne contient plus qu'une

des variables finies t, avec les premieres différences du, dt, & la feconde différence ddt nous defignerons cette equation par (A).

On pourra l'intégrer en fuppofant $du = zdt$, car on aura par cette fuppofition $ddu = dzdt + zddt$; &, par la fuppofition de dx conftante, & de $du = zdt$, on a $ddu = -bdu^2 = -bzzdt^2$; donc $-bzzdt^2 = dzdt + zddt$; d'où l'on tire $ddt = -bzdt^2 - \frac{dzdt}{z}$. Subftituant dans l'equation (A) la valeur de du, & celle de ddt, on aura $ab^p z^p dt^p = t^n (kztdt + dt)^{p-2} \times \{-bzdt^2 - \frac{dzdt}{z} + 2kzdt^2 + (kk-kb)z^2 tdt^2\}$, ou bien, en divifant par dt^{p-1}, & multipliant par z, on aura $(B)\, ab^p z^{p+1} dt = t^n (kzt + 1)^{p-2} (\overline{2k-b} . zzdt + \overline{kk-kb} . z^3 dt - dz)$, equation du premier ordre a deux variables z & t, dont on cherchera l'intégrale par les regles données pour cette forte d'equations, aprés y avoir fubftitué les valeurs de b & de k, qu'on aura determinées; & on aura par cette intégrale la valeur de z en t, ou celle de t en z; d'où l'on tirera, par les regles de la premiere Partie du Calcul Intégral, $S. zdt$, aprés avoir fubftitué dans la différentielle zdt la valeur de z en t, ou celle de t en z.

CCCCLXX.

COROLLAIRE I. Suppoſant qu'on ait pris $b = n + p - 1$, & par conſequent $k = m + p$, les ſuppoſitions de $x = e^{bu}$, de $y = e^{ku} t$, de $du = z\,dt$, & par conſequent de $u = S.z\,dt$, donneront $x = e^{\overline{n+p-1}.S.z\,dt}$, & $y = e^{\overline{m+p}.S.z\,dt} t$, ou $L.x = (n+p-1) S.z\,dt . \times L.e = (n+p-1) S.z\,dt$, & $L.y = (m+p) S.z\,dt . \times L.e + L.t = (m+p) S.z\,dt + L.t$.

CCCCLXXI.

COROLLAIRE II. Dans les mêmes ſuppoſitions on aura $S.z\,dt = \frac{L.x}{n+p-1}$, & en différentiant, $z\,dt = \frac{dx}{(n+p-1)x}$; on aura de plus $L.y = (m+p) S.z\,dt + L.t = \frac{m+p}{n+p-1} L.x + L.t = L.x^{\frac{m+p}{n+p-1}} + L.t = L.t\,x^{\frac{m+p}{n+p-1}}$; par conſequent $y = t\,x^{\frac{m+p}{n+p-1}}$; $t = y\,x^{\frac{-m-p}{n+p-1}}$, & $dt = x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dy - \left(\frac{m+p}{n+p-1}\right) \times y\,x^{-\left(\frac{m+n+2p-1}{n+p-1}\right)} dx$; d'où l'on tire $z = \frac{dx}{(n+p-1)\,x^{\frac{n-m-1}{n+p-1}} dy - (m+p)\,y\,x^{-\left(\frac{m+p}{n+p-1}\right)} dx}$. Donc, ſi on

ſi on a la valeur de z en t, ou celle de t en z, on pourra trouver le rapport de x a y. Car puiſque $t = y x^{\frac{-m-p}{n+p-1}}$, ſi on a la valeur de z en t, on aura celle de z en $y x^{\frac{-m-p}{n+p-1}}$, qu'on pourra ſubſtituer dans l'equation $z = \frac{dx}{(n+p-1) x^{\frac{n-m-1}{n+p-1}} dy - (m+p) y x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dx}$ qui deviendra par là une equation différentielle du premier ordre a deux variables x & y, qu'on intégrera par les regles connuës.

CCCCLXXII.

EXEMPLE I. On propoſe de reduire au premier ordre l'equation $x dx dy = y ddy$, dans laquelle dx eſt conſtante. Comparant cette equation reduite a la forme $x dx = y dy^{-1} ddy$, avec la formule generale $a x^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, on trouvera $a = 1$, $m = 1 = n = p$, $\frac{b}{k} = \frac{n+p-1}{m+p} = \frac{1}{2}$; donc, ſi l'on prend $k = 1$, on aura $b = \frac{1}{2}$, & mettant ces valeurs dans l'equation du premier ordre (B), ou $a b^p z^{p+1} dt = t^n (kzt+1)^{p-2} (\overline{2k-b}.zzdt + \overline{kk-kb}.z^3 dt -$

dz), on aura $\frac{1}{2}z^2dt = t(zt+1)^{-1}\left(\frac{3}{2}zzdt + \frac{1}{2}z^3dt - dz\right)$; &, en reduisant, $z^3tdt + z^2dt = 3z^2tdt + z^3tdt - 2tdz$.

Mais, si on prend, comme nous avons fait dans le Coroll. I., $b = n + p - 1 = 1$, & par consequent $k = m + p = 2$, on aura par l'equation (B), $z^2dt = t(2zt+1)^{-1}(3zzdt + 2z^3dt - dz)$; &, en reduisant, $2z^3dt + z^2dt = 3zztdt + 2z^3tdt - tdz$.

CCCCLXXIII.

Exemple II. Soit proposé de reduire au premier degré l'equation $\frac{adx}{x} = \frac{ddy}{ydy}$, ou $ax^{-1}dx = y^{-1} \times dy^{-1}ddy$, dans laquelle dx est constante. Comparant cette equation avec la formule generale, on trouve $m = -1$, $p = 1$, $n = -1$; on auroit donc dans ce cas $\frac{b}{k} = \frac{n+p-1}{m+p} = -\frac{1}{0}$, nombre infini; d'où l'on conclût que la methode ne peut servir dans cet exemple. Mais alors la reduction au premier ordre est facile, car on a $aydydx = xddy$; or dx etant constante, l'intégrale du terme $aydydx$ est $\frac{1}{2}ay^2dx$, & l'intégrale de l'autre terme $xddy$ est $xdy - ydx$; puisque la différentielle de $xdy - ydx$, en supposant dx

conſtante, eſt $x\,ddy + dx\,dy - dx\,dy - x\,ddy$: on aura donc $\frac{1}{2}ayy\,dx = x\,dy - y\,dx + C\,dx$, C etant une conſtante.

Il ſeroit inutile de rapporter un plus grand nombre d'exemples, qui peuvent tous ſe reſoudre aiſément par le Probleme precedent. Ainſi on voit que l'equation $y^2 ddy = x\,dx\,dy$, qui a embaraſſé autrefois les plus grands Calculateurs, ſe reduit facilement par la methode du Probleme. Nous allons maintenant paſſer au ſecond Cas, c'eſt a dire, lorſque la ſomme des expoſans des variables & de leurs différences premieres, & ſecondes eſt la même dans chaque terme de l'equation.

CCCCLXXIV.

PROBLEME VII. Intégrer les equations différentielles qui ſe rapportent a la formule generale $ax^m \times y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} +$ &c. $= ddy$, dans laquelle dx eſt conſtante, & la ſomme des dimenſions des variables finies x & y, & de leurs différences dx, dy, ddy eſt la même dans chaque terme.

SOLUTION. Il eſt facile de voir par le Lemme precedent, & ſes Corollaires, que, ſi on ſuppoſe dans ces ſortes d'equations $x = c^u$, & $y = c^u t$, les quantités

exponentielles feront, aprés les fubftitutions, les mêmes dans tous les termes de l'equation transformée, & qu'on pourra par confequent les faire difparoitre par la divifion. Car, puifque $x = e^{u}$, on aura $x^{m} = e^{mu}$, $x^{n} = e^{nu}$, $dx = e^{u}du$, $dx^{p} = e^{pu}du^{p}$, & de même, puifque $y = e^{u}t$, on aura $y^{-m-1} = e^{-mu-u}t^{-m-1}$; $y^{-n-1} = e^{-nu-u}t^{-n-1}$; $dy = e^{u}(tdu + dt)$; $dy^{2-p} = e^{2u-pu}(tdu + dt)^{2-p}$ &c.; $ddy = e^{u} \times (ddt + 2dudt + tdu^{2} + tddu)$, &, a caufe de dx conftante, qui donne $ddu = -du^{2}$, on aura $ddy = e^{u}(ddt + 2dudt)$.

Subftituant ces valeurs dans la formule propofée, elle devient $e^{u}(ddt + 2dudt) = ae^{mu}.e^{-mu-u}t^{-m-1}. \times e^{pu}du^{p}.e^{2u-pu}(tdu + dt)^{2-p} + b$ &c. $= ae^{u}t^{-m-1} \times du^{p}(tdu + dt)^{2-p} + be^{u}t^{-n-1}du^{q}(tdu + dt)^{2-q} +$ &c., & divifant toute l'equation par la quantité exponentielle e^{u}, qui fe trouve dans tous les termes, on aura $ddt + 2dudt = at^{-m-1}du^{p}(tdu + dt)^{2-p} + bt^{-n-1}du^{q}(tdu + dt)^{2-q} +$ &c., equation a deux variables u & t, dans laquelle la variable finie u ne fe trouve pas, & qui ne contient que les premieres différences du, dt avec leurs puiffances ou produits, & la feconde différence ddt au premier degré.

On fuppofera donc $du=zdt$, ce qui donne $ddu=zddt+dzdt$; mais les fuppofitions de dx conftante, & de $du=zdt$ donnent $ddu=-du^2=-z^2dt^2$; donc $-z^2dt^2=zddt+dzdt$, & $ddt=-\frac{dzdt}{z}-zdt^2$. Donc, en fubftituant, on aura l'equation fuivante $-\frac{dzdt}{z}-zdt^2+2zdt^2=zdt^2-\frac{dzdt}{z}=at^{-m-1}z^p dt^p(ztdt+dt)^{2-p}+bt^{-n-1}z^q dt^q(ztdt+dt)^{2-q}+\&c.$, ou bien (A) $zdt-\frac{dz}{z}=at^{-m-1}z^p dt(zt+1)^{2-p}+bt^{-n-1}z^q dt(zt+1)^{2-q}+\&c.$, equation différentielle a deux variables z & t, & qui ne contient que les premieres différences dz, dt, ou leurs fonctions, dont on cherchera l'intégrale par les regles données pour cette forte d'equations.

Mais puifque $du=zdt$, & par confequent $u=S.zdt$, on pourra reduire tout de fuite la propofée, en faifant $x=e^{S.zdt}$, & $y=e^{S.zdt}t$; car ces deux fuppofitions donnent (par le Lemme Art. CCCCLXV. & fes Corollaires) $dx=e^{S.zdt}zdt$; $dy=e^{S.zdt}(ztdt+dt)$, & $ddx=e^{S.zdt}(zddt+dzdt+zzdt^2)$, d'où l'on tire, a caufe de $ddx=o$, $ddt=-zdt^2-\frac{dzdt}{z}$ comme on l'a trouvé cy-deffus.

CCCCLXXV.

EXEMPLE I. Soit propofée l'equation $xdxdy - ydx^2 = yyddy$. Pour la comparer avec la formule generale, on l'ecrit ainfi $xy^{-2}dxdy - y^{-1}dx^2 = ddy$, & on trouve $a=1$, $m=1$, $p=1$, $n=0$, $b=-1$, $q=2$. Subftituant ces valeurs dans l'equation (A), elle devient $zdt - \frac{dz}{z} = t^{-2}zdt(zt+1) - t^{-1}z^2dt(zt+1)^0 = \frac{z^2tdt+zdt}{t^2} - \frac{z^2dt}{t} = \frac{zdt}{t^2}$; d'où l'on tire $z^2t^2dt - t^2dz = z^2dt$; $z^2t^2dt - z^2dt = t^2dz$; $dt - \frac{dt}{t^2} = \frac{dz}{z^2}$; &, en intégrant, $t + \frac{1}{t} = -\frac{1}{z} + C$ conftante; c'eft a dire, $t^2z + z = -t + Ctz$, & $z = \frac{t}{Ct - t^2 - 1}$. Mais $du = zdt$, & $z = \frac{du}{dt}$; donc $\frac{du}{dt} = \frac{t}{Ct - t^2 - 1}$, & $du = \frac{tdt}{Ct - t^2 - 1}$. D'un autre côté on a $x = e^u$, par confequent $L.x = u$, &, en différentiant $\frac{dx}{x} = du$. Donc $\frac{dx}{x} = \frac{tdt}{Ct - t^2 - 1}$. On a auffi $y = e^u t = xt$; $t = \frac{y}{x}$; $dt = \frac{xdy - ydx}{xx}$. Subftituant ces valeurs de t, & de dt dans l'equation $\frac{dx}{x} = \frac{tdt}{Ct - t^2 - 1}$, on trouvera par reduction $Cydx = ydy + xdx$.

CCCCLXXVI.

EXEMPLE II. Soit propoſée l'equation $y^2dx^3 + x^2dy^3 - yxdxdy^2 - yxdydx^2 + yx^2dxddy - xy^2 \times dxddy = o$, dans laquelle dx eſt conſtante, & qui eſt dans le cas du Probleme precedent, puiſque la ſomme des expoſans des variables finies x, y, & de leurs différences dx, dy, & ddy eſt la même, ſçavoir 5, dans chaque terme. On ſuppoſera donc, comme dans la ſolution du Probleme $x = c^u$, & $y = c^u t$, d'où l'on tire $dx = c^u du$, $dy = c^u(tdu + dt)$, &, a cauſe que $ddx = o$, $ddy = c^u(ddt + 2dudt)$. Subſtituant ces valeurs dans l'equation propoſée, elle deviendra aprés les reductions ordinaires la transformée $(B)\, dt^3 + 2tdudt^2 - t^2dtdu^2 + tdtdu^2 + tduddt - t^2duddt = o$, dans laquelle la variable finie u ne ſe trouve pas.

On fera donc $du = zdt$, d'où l'on tirera, comme dans la ſolution du Probleme, $ddu = -du^2 = -z^2dt^2 = dzdt + zddt$, & $ddt = -zdt^2 - \frac{dzdt}{z}$. Aprés avoir ſubſtitué ces valeurs dans l'equation (B), on aura la reduite $dt + 2tzdt - tdz + t^2dz = o$, ou bien $(t^2 - t)dz + 2tzdt + dt = o$, equation qui

eſt dans le Cas de l'Art. CCCLXXXII., & dont l'intégrale trouvée par la methode de cet Article eſt $(t-1)^2 z + t - L.t = C$ conſtante.

Mais par la ſuppoſition de $du = z dt$, on a $z = \frac{du}{dt}$; donc, en ſubſtituant cette valeur de z dans l'intégrale, qu'on vient de trouver, on aura $(t-1)^2 du + t dt - dt.L.t = C dt$, ou $du = \frac{C dt - t dt + dt.L.t}{(t-1)^2}$, &, en intégrant, $du = \frac{t - C - t.L.t}{t-1} + Q$. conſtante. D'un autre côté on a $x = e^u$, & $y = e^u t$; ce qui donne $u = L.x$; $y = xt$, & $t = \frac{y}{x}$. Donc ces valeurs de u, & de t etant ſubſtituées dans l'intégrale qu'on vient de trouver, on aura $L.x = \frac{\frac{y}{x} - C - \frac{y}{x} L.\frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 1} + Q = \frac{y - Cx - y L.y + y L.x - Qx + Qy}{y - x}$; d'où l'on tire, en ſuppoſant $C + Q = m$, & $1 + Q = n$, $y L.x - x.L.x = ny - mx - y L.y + y L.x$, & $ny - mx = y L.y - x L.x$.

Ces deux exemples ſuffiſent pour faire comprendre la reſolution de tous les autres ſemblables. Au reſte il eſt clair que l'equation différentielle $y^2 ddy = x dx dy$, dont

dont nous avons fait mention, & qui eſt reſoluble par le premier cas, l'eſt auſſi par celui-cy. Nous paſſerons maintenant au troiſieme cas, ſçavoir, lorſque la ſomme des expoſans de l'une des deux variables & de ſes différences eſt la même dans chaque terme de la propoſée.

CCCCLXXVII.

PROBLEME VIII. Intégrer les equations différentielles qui ſe rapportent a la formule generale $dx^m ddy = Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+2-n} + Rx^{m-p} \times dx^p dy^{m+2-p} + \&c.$, dont la ſomme des expoſans de x, & de dx eſt la même, ſçavoir m, dans tous les termes dx eſt conſtante, & P, Q, R, &c. ſont des fonctions quelconques de y.

SOLUTION. Suppoſant $x = c^u$, on aura $x^m = c^{mu}$; $x^{m-n} = c^{mu-nu}$; $dx^m = c^{mu} du^m$; $dx^n = c^{nu} \times du^n$, &c., & $ddu = -du^2$. Aprés avoir ſubſtitué ces valeurs dans la formule, & l'avoir diviſée par c^{mu}, qui ſe trouve dans tous les termes, on trouve la transformée $du^m ddy = Pdy^{m+2} + Qdu^n dy^{m+2-n} + Rdu^p dy^{m+2-p} + \&c.$, dans laquelle la variable finie u ne ſe trouve pas.

On fera donc $du = z dy$, d'où l'on tire $ddu = -du^2 = -z^2 dy^2 = z ddy + dz dy$; par consequent $ddy = -z dy^2 - \frac{dz dy}{z}$. En substituant ces valeurs dans la transformée, elle devient $-z^{m+1} dy^{m+2} - z^{m-1} dy^{m+1} dz = P dy^{m+2} + Q z^n dy^{m+2} + R z^p \times dy^{m+2}$ &c., & en divisant par dy^{m+1}, on a $-z^{m+1} dy - z^{m-1} dz = P dy + Q z^n dy + R z^p dy$ &c., equation du premier ordre à deux variables z & y, dont on cherchera l'intégrale par les regles connues; ce qui donnera la valeur de z en y, qu'on substituera dans l'equation $du = z dy$. On trouvera ensuite, par la premiere Partie du Calcul l'intégrale $u = S. z dy$, &, par ce que $L. x = u$, on aura $L. x = S. z dy$, equation, qui ne contiendra que les deux variables x & y, & des constantes.

Il est evident qu'on auroit reduit tout de suite la proposée, en supposant $x = e^{S. z dy}$; car cette supposition donne (par le Lemme Art. CCCCLXV. & ses Corollaires) $dx = e^{S. z dy} z dy$; $ddx = e^{S. z dy}(dz dy + z ddy + z^2 dy^2) = 0$, par consequent $ddy = -z dy^2 - \frac{dz dy}{z}$ comme on l'a trouvé plus haut.

EXEMPLE. On propoſe d'intégrer l'equation $2adx^2dy + axdxddy = 2xdxdy^2 + 2x^2ydddy$, dans laquelle dx eſt conſtante, la ſomme des expoſans de x & de dx eſt 2 dans tous les termes, & les coefficiens $2a$ & 2 des deux termes où ſe trouvent dy, ſont des fonctions de y^0, & de conſtantes. Suppoſant $x = e^{S.zdy}$, on aura $dx = e^{S.zdy}zdy$; $ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}$; ces valeurs etant ſubſtituées dans l'equation propoſée, elle devient $2ae^{2S.zdy}z^2dy^3 - ae^{2S.zdy}z^2dy^3 - ae^{2S.zdy}dzdy^2 = 2e^{2S.zdy}zdy^3 - 2e^{2S.zdy}zdy^3 - \frac{2e^{2S.zdy}dzdy^2}{z}$; & en diviſant par $e^{2S.zdy}$, qui ſe trouve dans tous les termes, on a, aprés la reduction, & aprés avoir diviſé par dy^2, $az^2dy - adz = -\frac{2dz}{z}$, ou bien $ady = \frac{azdz - 2dz}{z^3}$, equation dont l'intégrale eſt $ay = -\frac{a}{z} + \frac{1}{zz} + C$. conſtante. On peut trouver par cette intégrale la valeur de z en y, la ſubſtituer enſuite dans la différentielle zdy, & trouver en intégrant l'equation finie $L.x = S.zdy$. On peut auſſi par la ſuppoſition de $L.x = S.zdy$ reduire la propoſée a une equation, qui ne contienne que les premieres différences; car puiſque

$L.x = S.z\,dy$, on aura, en différentiant, $\frac{dx}{x} = z\,dy$; $z = \frac{dx}{x\,dy}$, &, remettant cette valeur dans l'intégrale $ay = -\frac{a}{z} + \frac{1}{zz} + C$, on aura $ay\,dx^2 = xx\,dy^2 - ax\,dx\,dy + C\,dx^2$.

CCCCLXXVIII.

PROBLEME IX. Intégrer les equations différentielles, qui sont contenues dans la formule generale $dx^{m-1}\,ddx = Px^m\,dy^{m+1} + Qx^{m-n}\,dx^n\,dy^{m-n+1} + Rx^{m-p}\,dx^p\,dy^{m-p+1} + \&c.$, dans laquelle dy est constante, P, Q, R, &c. sont des fonctions de y, la somme des exposans de x & de ses differences dx, ddx est m dans tous les termes.

SOLUTION. On suppose, comme cy-dessus $x = e^u$, $dx = e^u\,du$, $ddx = e^u(ddu + du^2)$, & substituant ces valeurs dans la formule, on a, en divisant par e^{mu} qui se trouve dans tous les termes, la transformée $du^{m+1} + du^{m-1}\,ddu = P\,dy^{m+1} + Q\,du^n\,dy^{m-n+1} + R\,du^p \times dy^{m-p+1} + \&c.$, dans laquelle u manque. Il faut donc supposer $du = z\,dy$: ce qui donne $ddu = dz\,dy$,

a cause de dy constante. Substituant ces valeurs dans la transformée, elle devient $z^{m+1}dy^{m+1}+z^{m-1}\times dy^m dz = Pdy^{m+1}+Qz^n dy^{m+1}+Rz^p dy^{m+1}+\&c.$; &, en divisant par dy^m, on a $z^{m+1}dy+z^{m-1}dz = Pdy+Qz^n dy+Rz^p dy+\&c.$, equation différentielle du premier ordre, a laquelle on parviendroit d'abord, en faisant $x=e.^{S.zdy}$.

EXEMPLE. Soit proposée l'equation $2dxdy = addx-yddx$, ou $x^\circ ddx = \frac{2dxdy}{a-y}$, dans laquelle dy est constante, la somme des exposans de x, & de ses différences dx & ddx est 1 dans chaque terme, & le coefficient $\frac{2}{a-y}$ du terme où se trouve dy est une fonction de y. On fera donc $x=e^{S.zdy}$, $dx=e^{S.zdy}\times zdy$, $ddx=e^{S.zdy}(z^2dy^2+zddy+dzdy)$. Mais comme dy est constante, on aura $ddy=o$, par consequent $ddx=e^{S.zdy}(z^2dy^2+dzdy)$. Substituant ces valeurs dans la proposée, on trouve $2zdy^2=az^2dy^2+adzdy-zzydy^2-ydydz$; & en divisant par dy, on a $2zdy=az^2dy+adz-zzydy-ydz$, equation du premier ordre. On peut reduire tout de suite la

proposée en la mettant sous cette forme $2dxdy + yddx = addx$, dont l'intégrale, en supposant dy constante, est $ydx + xdy = adx + Cdy$.

CCCCLXXIX.

Les methodes precedentes peuvent s'appliquer egalement a toutes les equations différentielles de quelqu'ordre qu'elles soient, pourvû qu'elles se trouvent renfermées dans les cas enonçés cy-dessus. Soit par exemple l'equation generale

$$Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} \dots\dots\dots + \frac{Nd^ny}{dx^n} = 0$$

dans laquelle les quantités A, B, C, D &c. representent des constantes, ou des variables finies & des constantes avec les conditions requises. Soit fait $y = e^{S.zdx}$, on aura (par le Lemme Art. CCCCLXV.)

$$\frac{dy}{dx} = e^{S.zdx}z; \ \frac{ddy}{dx^2} = e^{S.zdx}\left(zz + \frac{dz}{dx}\right); \ \frac{d^3y}{dx^3} = e^{S.zdx}\left(z^3 + \frac{3zdz}{dx} + \frac{ddz}{dx^2}\right)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = e^{S.zdx}\left(z^4 + \frac{6zzdz}{dx} + \frac{4zddz}{dx^2} + \frac{3dz^2}{dx^2} + \frac{d^3z}{dx^3}\right)$$

Si on substitue ces valeurs dans l'equation proposée, elle sera divisible par $e^{S.zdx}$, & elle deviendra de l'ordre $n - 1$. Il est evident que cette methode est applicable aux trois cas precedents; par exemple au premier, en faisant les coefficients egaux a zero, excepté ceux des deux termes qu'on veut reduire a un ordre

inférieur, & dans les deux autres cas, on determinera A, B, C, D, &c., enforte que les termes ayent les conditions neceſſaires. Donc en general une equation différentielle du degré n contenue dans les cas precedents pourra toujours s'abaiſſer au degré $n-1$. Mais nous traiterons cette equation plus generalement dans le Chapitre ſuivant.

CCCCLXXX.

La methode que nous avons expliquée (Article CCCCXVI. & ſuivants) pour intégrer un nombre quelconque d'equations différentielles du premier ordre, peut facilement s'etendre aux equations différentielles de tous les ordres, c'eſt a dire, que ſi l'on a un nombre N d'equations différentielles renfermant le nombre $N+1$ de variables t, x, y, z, u, &c., chaque equation pouvant ſe reduire a la forme ſuivante $(K)\; o = \theta + ax + by + cz + \&c. + \frac{a'dx}{dt} + \frac{b'dy}{dt} + \frac{c'dz}{dt} + \&c. + \frac{a''ddx}{dt^2} + \frac{b''ddy}{dt^2} + \frac{c''ddz}{dt^2} + \&c. + \frac{a'''d^3x}{dt^3} + \frac{b'''d^3y}{dt^3} + \frac{c'''d^3z}{dt^3} + \&c. \ldots\ldots + \frac{Ad^nx}{dt^n} + \frac{Bd^ny}{dt^n} + \frac{Cd^nz}{dt^n} + \&c.$, dans laquelle dt eſt conſtante, θ une fonction quelconque de t, & a, b, c, &c., a', b', c', &c., a'', b'', c'', &c........ A, B, C, &c. ſont des conſtantes quelconques, ou zero; on pourra toujours intégrer ces equations par la methode de

l'Art. CCCCXVI. en ſuppoſant $dx = pdt$, $ddx = qdt^2$, $d^3x = rdt^3$, &c. juſqu'a $d^{n-1}x = sdt^{n-1}$, & de même $dy = p'dt$, $ddy = q'dt^2$, $d^3y = r'dt^3$ &c. juſqu'a $d^{n-1}y = s'dt^{n-1}$; $dz = p''dt$, $ddz = q''dt^2$, $d^3z = r''dt^3$ &c. juſqu'a $d^{n-1}z = s''dt^{n-1}$, p, q, r, s, &c. p', q', r', s', &c. p'', q'', r'', s'', &c. etant de nouvelles variables. Car, puiſque dt eſt conſtante, en différentiant les equations $dx = pdt$, $ddx = qdt^2$, $d^3x = rdt^3, \ldots\ldots d^{n-1}x = sdt^{n-1}$, on aura $ddx = dpdt$, $d^3x = dqdt^2, \ldots\ldots d^nx = dsdt^{n-1}$; par conſequent $\frac{a''ddx}{dt^2} = \frac{a''dp}{dt}$; $\frac{a'''d^3x}{dt^3} = \frac{a'''dq}{dt}; \ldots\ldots \frac{Ad^nx}{dt^n} = \frac{Ads}{dt}$. On aura de même $ddy = dpdt$; $d^3y = dq'dt^2; \ldots\ldots d^ny = ds'dt^{n-1}$, & par conſequent $\frac{b''ddy}{dt^2} = \frac{b''dp'}{dt}$; $\frac{b'''d^3y}{dt^3} = \frac{b'''dq'}{dt}; \ldots\ldots \frac{Bd^ny}{dt^n} = \frac{Bds'}{dt}$. On trouvera de même les valeurs des différentielles ddz, d^3z, &c. ddu, d^3u, &c. ſubſtituant ces valeurs dans la formule (K), elle devient $o = \theta + ax + by + cz$ $+$ &c. $+ \frac{a'dx}{dt} + \frac{b'dy}{dt} + \frac{c'dz}{dt} +$ &c. $+ \frac{a''dp}{dt} + \frac{b''dp'}{dt} + \frac{c''dp''}{dt} +$ &c. $+ \frac{a'''dq}{dt} + \frac{b'''dq'}{dt} + \frac{c'''dq''}{dt} +$ &c. $\ldots\ldots +$

$\frac{Ads}{dt} + \frac{Bds'}{dt} + \frac{Cds''}{dt} + \&c.$; equation qui ne contient que les variables t, x, y, z, &c. avec leurs premieres différences dt, dx, dy, dz, &c. & les premieres différences dp, dq, dr, ds, &c. dp', dq', dr', ds', &c. dp'', dq'', &c. des variables p, q, r, s, &c., p', q', r', &c., p'', q'', &c. On aura de plus autant d'equations de la forme requiſe par l'Art. CCCCXVI., qu'on aura introduit de nouvelles variables p, p', p'', &c. q, q', q'', &c. r, r', r'', &c. s, s', s'', &c. dans la formule (k). Car, puiſque $dx = pdt$, on aura $dx - pdt = o$; & puiſque $ddx = qdt^2 = dpdt$, on aura $dp = qdt$, & $dp - qdt = o$, &c., & de même $dy - p'dt = o$, $dp' - q'dt = o$, &c. Donc toutes ces equations pourront s'intégrer par la methode de l'Art. CCCCXVI. en les multipliant toutes, excepté la premiere, par différentes conſtantes indeterminées, & pratiquant enſuite les autres operations que preſcrit cette methode. C'eſt ce que nous allons eclaircir par quelques exemples.

CCCCLXXXI.

Exemple I. On propoſe d'intégrer l'equation différentielle du ſecond ordre $Tddx + aTdxdt + bxTdt^2 + T'dt^2 = o$, dans laquelle dt eſt conſtante, & T, T' ſont des fonctions quelconques de t. Divi-

ſant cette equation par $T\,dt^2$, & ſuppoſant $\frac{T'}{T} = \theta$ fonction de t, on la reduit a la forme (K), ou $o = \theta + bx + \frac{adx}{dt} + \frac{ddx}{dt^2}$. On fera donc $dx = p\,dt$, d'où l'on tire, en différentiant, $ddx = dp\,dt$, & ſubſtituant cette valeur de ddx dans la propoſée, on aura $o = \theta + bx + \frac{adx}{dt} + \frac{dp}{dt}$, ou $dp + a\,dx + bx\,dt + \theta\,dt = o$, & $dx - p\,dt = o$; deux equations a trois variables t, x, p, qui ont les conditions qui exige la methode de l'Art. CCCCXVI. On multipliera donc la ſeconde equation par un facteur conſtant, & indeterminé A. On ajoutera le produit $A\,dx - A\,p\,dt = o$ a la premiere equation, & on aura la ſomme $dp + (A + a)\,dx + (bx - Ap)\,dt + \theta\,dt = o$. On ſuppoſera enſuite, ſuivant la methode, $bx - Ap = Mp + M(A + a)x$, M etant un autre facteur conſtant & indeterminé; & en comparant terme a terme les deux membres de cette equation, on aura $bx = M(A + a)x$, & $-Ap = Mp$, d'où l'on tire $M = -A$, & $M = \frac{b}{A + a}$; par conſequent $A = -\frac{b}{A + a}$; $AA + Aa = -b$, & $A = \frac{-a \pm \sqrt{aa - 4b}}{2}$; ce qui donne deux valeurs de A, que nous exprimerons par A, & A', & auſſi deux valeurs correſpondantes de M, que nous deſignerons par M &

M'. En fubftituant ces valeurs dans l'equation $bx - Ap = Mp + M(A+a)x$, & fuppofant $p+(A+a)x = u$, & $p+(A'+a)x = u'$, l'equation $dp+(A+a)dx+(bx-Ap)dt+\theta dt = o$ fe change en ces deux autres $du+Mudt+\theta dt = o$, & $du'+M'u'dt+\theta dt = o$, qu'on intégrera par l'Article CCCLXXXII. On trouvera donc u & u' en t, & en conftantes; & enfuite les deux equations $p+(A+a)x = u$, & $p+(A'+a)x = u'$ donneront la valeur de x en t.

CCCCLXXXII.

Exemple II. On propofe d'intégrer l'equation différentielle du troifieme ordre $Td^3x + aTddxdt + bTdxdt^2 + cxTdt^3 + T'dt^3 = o$, ou, en divifant par Tdt^3, & fuppofant $\frac{T'}{T} = \theta$, $o = \theta + cx + \frac{bdx}{dt} + \frac{addx}{dt^2} + \frac{d^3x}{dt^3}$, qui a la forme requife. On fuppofera donc $dx = pdt$, $ddx = qdt^2$; d'où l'on tirera, en différentiant, $ddx = dpdt$, $d^3x = dqdt^2$, &, par fubftitutions, $o = \theta + cx + \frac{bdx}{dt} + \frac{adp}{dt} + \frac{dq}{dt}$, ou $dq + adp + bdx + cxdt + \theta dt = o$. Or ces trois equations peuvent s'intégrer par l'Art. CCCCXVI. en multipliant la feconde de ces equations par la conftante in-

determinée A, & la troisieme par la constante indeterminée B, & ajoutant les deux produits $A\,dx - Ap\,dt = o$, & $B\,dp - Bq\,dt = o$ a la premiere equation pour avoir la somme $dq + (a + B)dp + (b + A)dx + (cx - Ap - Bq)dt + \theta dt = o$. On fera ensuite $cx - Ap - Bq = M\{q + (a + B)p + (b + A)x\} = M(b + A)x + M(a + B)p + Mq$, M etant un autre facteur constant & indeterminé; &, en egalant les termes homologues, on aura les trois equations suivantes $M(b + A)x = cx$; $M(a + B)p = -Ap$; $Mq = -Bq$; d'où l'on tire $M = \frac{c}{b + A}$; $M = \frac{-A}{a + B}$; $M = -B$; par consequent $\frac{c}{b + A} = -\frac{A}{a + B} = -B$; d'où l'on deduira, aprés avoir fait les reductions ordinaires, une equation du troisieme degré, qui donnera trois valeurs de A, que nous designerons par A, A', A'', & les trois valeurs correspondantes de B par B, B', B'', celles de M par M, M', M''. En substituant ces valeurs dans l'equation $cx - Ap - Bq = M\{q + (a + B)p + (b + A)x\}$, & supposant $q + (a + B)p + (b + A)x = u$; $q + (a + B)p + (b + A')x = u'$; $q + (a + B'')p + (b + A'')x = u''$, l'equation $dq + (a + B)dp + (b + A)dx + (cx - Ap - Bq)dt + \theta dt = o$ se changera dans ces trois autres equations $du + Mu\,dt + \theta dt = o$, $du' + M'u'dt + \theta dt = o$,

$du'' + M''u''dt + 6dt = o$, qu'on intégrera par l'Article CCCLXXXII.. On trouvera donc les valeurs de u, de u', & de u'' en t & en conftantes, & enfuite les trois equations $q + (a + B)p + (b + A)x = u$; $q + (a + B')p +$ &c. donneront les valeurs de x en t & conftantes.

CCCCLXXXIII.

Exemple III. On propofe d'intégrer les deux equations fuivantes du fecond & du troifieme ordre.

$$o = T + ax + by + \frac{cdx}{dt} + \frac{fdy}{dt} + \frac{ddx}{dt^2}.$$

$$o = T' + gx + \frac{hdy}{dt} + \frac{d^3y}{dt^3}.$$

Dans lefquelles dt eft conftante, & T, T' font des fonctions de t. On fera $dx = pdt$, $dy = qdt$, & $ddy = rdt^2$, d'où l'on tirera, en différentiant, $ddx = dpdt$, $ddy = dqdt$, $d^3y = drdt^2$; par confequent $dqdt = rdt^2$, & $dq = rdt$. Subftituant $dpdt$ au lieu de ddx, & $drdt^2$ au lieu de d^3y dans les equations propofées, on les changera en ces deux autres

$$dp + cdx + fdy + (ax + by)dt + Tdt = o$$
$$dr + hdy + gxdt + T'dt = o$$

& on aura de plus les trois equations fuivantes $dx - pdt = o$; $dy - qdt = o$; $dq - rdt = o$. Ces cinq equa-

tions ont toutes les conditions qu'exige la methode de l'Art. CCCCXVI.

On multipliera donc les quatre dernieres de ces equations par les conſtantes indeterminées A, B, C, E, & ajoutant les quatre produits a la premiere equation, on aura la ſomme (H), $dp + Edq + Adr + (c + B)dx + (f + bA + C)dy + (ax + gAx + by - Bp - Cq - Er)dt + (T + AT')dt = o$. Enſuite, M etant un facteur conſtant & indeterminé, on ſuppoſera ſuivant la methode $(a + gA)x + by - Bp - Cq - Er = M\{p + Eq + Ar + (c + B)x + (f + bA + C)y\} = Mu$ & en developpant le ſecond membre de cette equation, & egalant tous les termes homologues, on aura les equations ſuivantes: $M = -B$, $ME = -C$; $MA = -E$; $M(c + B) = a + gA$; $M(f + bA + C) = b$, & l'equation (H) deviendra $du + Mudt + (T + AT')dt = o$, qu'on pourra intégrer par l'Article CCCLXXXII. aprés avoir determiné les valeurs de A & de M par les equations qu'on vient de trouver. Car, puiſque $B = -M$, $E = -MA$, & $C = -ME = M^2A$. Si on ſubſtitue ces valeurs de B, de C, & de E dans les deux equations $M(c + B) = a + gA$, & $M(f + bA + C) = b$, elles deviendront $M(c - M) = a + gA$ & $M(f + bA + M^2A) = b$, d'où l'on tire $A =$

$\frac{cM - M^3 - a}{g} = \frac{b - fM}{hM + M^3}$ & de là une equation du cinquieme degré qui donnera cinq valeurs de M, d'où l'on deduira les cinq différentes valeurs correſpondantes des facteurs A, B, C, E. On fera le reſte comme dans les exemples precedents au moyen des deux equations $du + Mudt + (T + AT')dt = o$, & $p + Eq + Ar + (c + B)x + (f + bA + C)y = u$.



CHAPITRE VII.

Methode pour trouver l'intégrale complette de l'equation $o = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} \ldots\ldots + \frac{Nd^ny}{dx^n}$ *&c. Dans laquelle* dx *est constante, & les coefficiens* $A, B, C, D, E,$ *&c. sont aussi constants, ou des fonctions de la variable* x, *& de constantes.*

CCCCLXXXIV.

Si on suppose que u soit une quantité composée, comme on voudra, de constantes & de variables $u, y, z,$ &c., parmi lesquelles x ait sa premiere différence constante; on sçait que la premiere intégrale de la différentielle $d^n u$ sera $d^{n-1} u$, a laquelle il faudra ajouter la constante du même ordre Adx^{n-1}, pour la rendre complette, A etant une constante arbitraire.

La seconde intégrale de la différentielle proposée $d^n u$ sera $d^{n-2} u$, & $d^{n-2} u + Axdx^{n-2}$, a laquelle il faudra ajouter la constante du même ordre Bdx^{n-2}, pour avoir la seconde intégrale complette, $d^{n-2} u +$

$Axdx^{n-2}$

$Axdx^{n-2} + Bdx^{n-2}$, B etant une constante arbitraire. La troisieme intégrale complette de la différentielle proposée sera $d^{n-3}u + \frac{1}{2}Ax^2dx^{n-3} + Bxdx^{n-3} + Cdx^{n-3}$, C etant une troisieme constante arbitraire; par où l'on voit que la derniere intégrale complette & finie de la différentielle proposée aura la forme $u + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \&c. + Q$, qui contiendra autant de constantes arbitraires A', B', C', D', &c. Q, qu'il y aura d'unités dans l'exposant n de l'ordre de la différentielle proposée d^nu. Il est clair que tout ce que nous venons de dire, doit s'appliquer aux intégrales des mêmes différentielles, lorsqu'elles sont en forme d'equations, de sorte que la premiere equation intégrale complette de l'equation différentielle $d^nu = 0$ sera $d^{n-1}u + Adx^{n-1} = 0$, la seconde equation intégrale complette de l'equation $d^nu = 0$ sera $d^{n-2}u + Axdx^{n-2} + Bdx^{n-2} = 0$. La troisieme sera $d^{n-3}u + \frac{1}{2}Ax^2dx^{n-3} + Bxdx^{n-3} + Cdx^{n-3} = 0$, & l'equation intégrale complette & finie sera $u + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots + Q = 0$, qui contient autant de constantes arbitraires, qu'il y a d'unités dans l'exposant n.

V u

CCCCLXXXV.

Il eſt donc neceſſaire de bien diſtinguer les intégrales complettes d'avec les incomplettes & particulieres; car $u + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \&c. \ldots\ldots + Q = o$ eſt la ſeule intégrale complette & finie de l'equation $d^n u = o$. Mais ſi dans cette intégrale on determine une ou pluſieurs des conſtantes arbitraires, ou ſi on les ſuppoſe egales a des conſtantes arbitraires ou a zero, on aura autant d'intégrales incomplettes ou particulieres, qu'on aura fait de ſuppoſitions, & chacune de ces intégrales ſatisfera a l'equation différentielle $d^n u = o$, mais elles ne la rempliront pas dans toute ſon etendüe. Nous allons eclaircir cette matiere importante par deux exemples.

EXEMPLE I. On propoſe d'intégrer l'equation différentielle du premier ordre $aady + yydx = (aa + xx)dx$. On voit d'abord, qu'on ſatisfait a cette equation en ſuppoſant $y = x$, puiſqu'en ſubſtituant x au lieu de y, & dx au lieu de dy dans l'equation propoſée, elle devient $aadx + xxdx = (aa + xx)dx$, qui eſt une equation identique, dont tous les termes ſe detruiſent mutuellement. Donc $y - x = o$ eſt une equation intégrale de la propoſée; mais elle n'eſt pas complette, puiſqu'elle ne contient ny la conſtante a, qui

eſt deja dans l'equation propoſée, ny la conſtante arbitraire qui doit toujours ſe trouver dans l'intégrale complette d'une différentielle du premier ordre. L'intégrale complette de la propoſée eſt $y = x + \frac{Aaa.e^{-\frac{xx}{aa}}}{aa + A.S.e^{-\frac{xx}{aa}}dx}$, dans laquelle A eſt une conſtante arbitraire, & $L.e = 1$. Car ſi on ſuppoſe $y = x + z$, on aura $dy = dx + dz$, & ſubſtituant ces valeurs au lieu de y, & de dy dans l'equation propoſée, elle devient $aadz + 2zxdx + zzdx = o$, qui eſt dans le Cas de l'Art. CCCLXXXII. & dont l'intégrale trouvée par cet Article eſt $z = \frac{Aaa.e^{-\frac{xx}{aa}}}{aa + A.S.e^{-\frac{xx}{aa}}dx}$. Donc l'intégrale complette ſera $y = x + \frac{Aaa.e^{-\frac{xx}{aa}}}{aa + A.S.e^{-\frac{xx}{aa}}dx}$, qui rend l'intégrale particuliere $y = x$, en ſuppoſant $A = o$.

Exemple II. On veut intégrer l'equation différentielle du ſecond ordre $o = -y + \frac{xdy}{dx} + \frac{axddy}{dx^2}$, qui eſt un cas particulier de nôtre formule generale $o = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} +$ &c. On voit d'abord que l'equation

$y - x = o$, ou $y = x$ eſt une intégrale particuliere de la propoſée, puiſqu'en ſubſtituant x pour y, dx pour dy, & ddx ou zero pour ddy, la propoſée devient $o = -x + x + o$, equation identique. Mais il s'en faut bien que cette equation finie $y = x$ ſoit l'intégrale complette de la propoſée, & qu'elle en rempliſſe toute l'etendüe, puiſque cette intégrale complette doit renfermer deux conſtantes arbitraires, outre la conſtante a, qui ſe trouve deja dans la différentielle propoſée. On voit encore, & par la même raiſon, que cette equation finie $y = Ax$, dans laquelle A eſt une conſtante arbitraire, eſt une intégrale incomplette de la propoſée. L'intégrale finie & complette eſt $Ax + Bx . S. \frac{e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx}$, qui, outre la conſtante a, contient deux autres conſtantes indeterminées A & B. On trouve cette intégrale en ſuppoſant $y = Ax + xz$; ce qui donne $dy = Adx + zdx + xdz$; $ddy = 2dzdx + xddz$, &, par ſubſtitution, $o = -y + \frac{xdy}{dx} + \frac{axddy}{dx^2} = -Ax - xz + Ax + xz + \frac{x^2 dz}{dx} + \frac{2axdz}{ax} + \frac{ax^2 ddz}{dx^2}$; d'où l'on tire $xdzdx + 2adzdx + ax^2 ddz = o$; &, en diviſant le tout par $axdz$, $\frac{dx}{a} + \frac{2dx}{x} + \frac{ddz}{dz} = o$, ou $\frac{2dx}{x} + \frac{ddz}{dz}$

$= -\frac{dx}{a}$. L'intégrale du premier membre est $2 L.x + L.dz = L.x^2 + L.dz = L.x^2 dz$. L'integrale du second membre est $-\frac{x}{a} = -\frac{x}{a}.L.e = L.e^{-\frac{x}{a}}$. Donc la premiere intégrale complette de l'equation $\frac{2dx}{x} + \frac{ddz}{dz} = -\frac{dx}{a}$, en ajoutant la constante arbitraire du même ordre $L.Bdx$, sera $L.x^2 dz = L.e^{-\frac{x}{a}} + L.Bdx$, ou $L.x^2 dz = L.Be^{-\frac{x}{a}}dx$; par consequent $x^2 dz = Be^{-\frac{x}{a}}dx$; $dz = \frac{Be^{-\frac{x}{a}}dx}{xx}$; &, en intégrant encore, on aura $z = B.S.\frac{e^{-\frac{x}{a}}dx}{xx}$. Donc l'intégrale complette de la proposée sera $y = Ax + BxS.\frac{e^{-\frac{x}{a}}dx}{xx}$ qui, outre la constante a, contient les deux constantes arbitraires A & B, comme il convient.

On n'a point ajouté de constante arbitraire en intégrant l'equation $dz = \frac{Be^{-\frac{x}{a}}dx}{xx}$, par ce qu'elle etoit inutile. Car, si on fait $z = C + B.S.\frac{e^{-\frac{x}{a}}dx}{xx}$, on

aura pour l'intégrale complette cherchée $y = Ax + Cx + Bx.S.\frac{e^{-\frac{x}{a}}dx}{xx} = (A + C)x + Bx.S.\frac{e^{-\frac{x}{a}}dx}{xx}$. Or on peut exprimer la ſomme $A + C$ par une ſeule lettre A', qui repreſente une conſtante quelconque.

CCCCLXXXVI.

Quoiqu'il ſoit evident, par ce que nous avons dit, que toutes les equations intégrales particulieres ſoient contenues dans l'intégrale complette, ou que celle-cy ſoit compoſée de pluſieurs intégrales particulieres, qui peuvent quelquefois ſervir a decouvrir l'intégrale complette, comme nous l'avons vû dans les deux exemples precedents, il arrive neantmoins fort ſouvent que les intégrales particulieres qu'on connoît, ne ſont d'aucun ſecours pour trouver l'intégrale complette, ou même une intégrale plus etendüe, que les particulieres données. Mais l'equation generale que nous traitons icy, $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} +$ &c. a cet avantage, que, ſi on connoît quelques valeurs particulieres de y en x, & conſtantes, on peut aiſément en deduire d'autres valeurs plus etendues qui renferment les valeurs données, & même ſi on a un nombre ſuffiſant de ces valeurs particulieres de y, on pourra en deduire la valeur generale, ou l'intégrale complette qu'on cherche.

CCCCLXXXVII.

Il eſt clair que, ſi p eſt un valeur convenable de y en x & conſtantes, de ſorte qu'on ait $y = p$, alors on aura auſſi $y = \alpha p$, α etant une conſtante arbitraire. Car, ſi la valeur p etant ſubſtituée au lieu de y dans la quantité $Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2} + \&c.$ rend cette quantité egale a zero, la valeur αp etant auſſi ſubſtitué au lieu de y la fera evanoüir de la même maniere; on pourra donc introduire de cette façon une conſtante arbitraire α dans l'equation intégrale particuliere $y = p$. De même, ſi on a de plus l'equation $y = q$, qui ſatisfaſſe a l'equation propoſée, on aura encore $y = \beta q$, β etant une autre conſtante arbitraire; & de ces deux valeurs $y = \alpha p$, & $y = \beta q$, on en deduira une troiſieme $y = \alpha p + \beta q$; car, ſi la quantité $Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2} + \&c.$ devient egale a zero par les ſubſtitutions particulieres de αp, & de βq au lieu de y, il eſt evident qu'elle s'evanoüira de même par la ſubſtitution de la ſomme $\alpha p + \beta q$ au lieu de y.

CCCCLXXXVIII.

De même ſi p, q, r, s, &c. ſont des fonctions de x, telles que chacune d'elles etant ſubſtituée au lieu

de y dans la quantité $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \&c.$ la rende egale a zero, alors la somme $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \&c.$ etant substituée au lieu de y dans la même quantité, la rendra aussi nulle; de sorte que, si p, q, r, s, &c. sont des valeurs particulieres de y en x, qui satisfassent a l'equation différentielle proposée, on en deduira tout d'un coup une valeur beaucoup plus etendüe de y en x, sçavoir, $y = \alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \&c.$, qui satisfera a l'equation proposée, & cette valeur sera generale, & donnera l'intégrale complette, si elle contient autant de constantes arbitraires, qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'equation différentielle proposée. Il est donc facile, lorsqu'on a un nombre suffisant de valeurs particulieres de y en x, d'en deduire sa valeur complette, c'est a dire, celle qui comprend toutes les valeurs de y, qui satisfont a l'equation proposée, & qui donne l'intégrale complette de cette equation en termes finis.

CCCCLXXXIX.

Ainsi pour trouver l'intégrale finie & complette de l'equation proposée $o = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{Nd^ny}{dx^n}$, il ne s'agit plus que de chercher des valeurs particulieres de y en x, telles qu'etant substi-

ſubſtituées dans cette equation, elles la rendent identique; & de trouver autant de ces valeurs particulieres, qu'il eſt neceſſaire, pour que priſes toutes enſemble, elles renferment autant de conſtantes arbitraires, qu'il y a d'unités dans l'expoſant n. C'eſt pourquoy, ſi chaque equation particuliere, qui exprime la valeur de y en x, ne contient qu'une conſtante arbitraire, il faudra trouver le nombre n de ces equations particulieres, pour en deduire l'intégrale finie & complette de l'equation propoſée. Mais, ſi parmi ces equations particulieres il s'en trouvent quelques-unes, qui renferment pluſieurs conſtantes arbitraires, on pourra trouver l'intégrale complette avec un nombre de ces equations particulieres d'autant moindre, que chacune d'elles contiendra plus de conſtantes arbitraires.

CCCCXC.

Nous ne connoiſſons point de methode generale pour trouver le nombre ſuffiſant d'equations particulieres entre y & x, lorſque les coefficiens A, B, C, D, &c.... N de la propoſée renferment des fonctions de x; mais on a cette methode, lorſque tous ces coefficients ſont ſuppoſés conſtants, c'eſt ce que nous allons expliquer.

Soit donc propoſé de trouver l'intégrale finie & complette de l'equation différentielle $o = Ay + \frac{Bdy}{dx} +$

$\frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} \ldots\ldots + \frac{Nd^ny}{dx^n}$, dans laquelle la différence dx, & tous les coefficiens $A, B, C,$ &c. N ſont des quantités conſtantes. Nous deſignerons cette equation ainſi determinée par (H).

Pour la reſoudre generalement, nous obſerverons d'abord que, ſi on ſuppoſe $y = e^{bx}$, b etant une conſtante indeterminée, & $L.e = 1$, on aura (Art. CCCCLXV.) $\frac{dy}{dx} = be^{bx}$; $\frac{ddy}{dx^2} = b^2 e^{bx}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = b^3 e^{bx}$ &c. $\frac{d^ny}{dx^n} = b^n e^{bx}$, & qu'en ſubſtituant ces valeurs dans l'equation propoſée (H), & diviſant par e^{bx}, qui ſe trouve dans tous les termes, on aura l'equation algebrique ſuivante, que nous deſignerons par (K), $o = A + Bb + Cb^2 + Db^3 \ldots\ldots\ldots + Nb^n$, dont l'inconnüe eſt b, & qui eſt du degré n.

Si on tire de cette equation (K) quelque valeur de b, & qu'on la ſubſtitue dans l'equation $y = e^{bx}$, on aura une valeur particuliere de y en x & conſtantes, laquelle etant ſubſtituée au lieu de y dans la propoſée (H) la rendra identique. Suppoſé, par exemple, qu'une des racines de l'equation (K) ſoit f, de ſorte qu'on ait $b = f$, ou $b - f = o$, diviſeur de cette equation (K), on aura auſſi $y = e^{fx}$ equation intégrale particuliere de

la propoſée (H); d'où l'on tire (Art. CCCCLXXXVII.) $y = \alpha e^{fx}$, autre equation intégrale particuliere, qui renferme une conſtante arbitraire α. Or l'equation algebrique (K) du degré n contient le nombre n de racines, ou de diviſeurs ſimples, comme $b - f = 0$, ſoit que ces racines ſoient egales ou intégrales, réelles ou imaginaires. Donc, ſi toutes ces racines ſont inégales entr'elles, on aura le nombre n de valeurs particulieres de y en x, dont chacune contiendra une conſtante arbitraire, & la ſomme de ces valeurs particulieres renfermera le nombre n de conſtantes arbitraires, & donnera la valeur complette de y en x & conſtantes, ou l'intégrale finie & complette de l'equation propoſée (H); de ſorte que, ſi on deſigne toutes les racines inégales de l'equation (K) par f, f', f'', f''', &c. reſpectivement, on aura pour l'intégrale cherchée $y = \alpha e^{fx} + \beta e^{f'x} + \gamma e^{f''x} + \delta e^{f'''x} +$ &c., &, ſi toutes ces racines ſont réelles, cette intégrale ſera auſſi toute réelle, & ne dependra que des logarithmes.

CCCCXCI.

On pourra auſſi trouver l'intégrale réelle & complette de l'equation (H) en termes finis, lorſque l'equation algebrique (K) aura des racines egales, & des racines imaginaires. Pour en trouver le moyen, il ne

faut que confiderer attentivement la relation, qui eft entre l'equation différentielle (H), ou $o = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \&c. \ldots\ldots + \frac{Nd^n y}{dx^n}$, & l'equation algebrique (K), ou $o = A + Bb + Cb^2 \ldots\ldots + Nb^n$. Cette relation eft telle, que, fi dans l'equation différentielle (H) on ecrit b^o pour y, b^1 pour $\frac{dy}{dx}$, b^2 pour $\frac{ddy}{dx^2}$, b^3 pour $\frac{d^3y}{dx^3}$, & generalement b^k pour $\frac{d^ky}{dx^k}$, cette equation (H) deviendra l'equation algebrique (K), & au contraire, fi dans l'equation (K) on ecrit y pour b^o, $\frac{dy}{dx}$ pour b^1, $\frac{ddy}{dx^2}$ pour b^2, & generalement $\frac{d^ky}{dx^k}$ pour b^k, on retablira l'equation différentielle (H). D'où l'on conclût que fi dans les divifeurs de l'equation algebrique (K) on ecrit y au lieu de b^o, $\frac{dy}{dx}$ au lieu de b^1, & generalement $\frac{d^ky}{dx^k}$ au lieu de b^k, on formera une equation différentielle, qui fera contenue dans la propofée (H), & de laquelle on tirera une valeur particuliere de y en x, qui etant fubftituée dans cette equation (H), la rendra identique. Par exemple fi $b - f$, ou $b^1 - fb^o = o$ eft un divifeur de l'e-

quation algebrique (K), on en tirera l'equation différentielle $\frac{dy}{dx} - fy = o$, ou $\frac{dy}{y} = f dx$, dont l'intégrale eft $L.y = fx = fx.L.c = L.c^{fx}$; par confequent $y = c^{fx}$, qui donne l'intégrale particuliere $y = ac^{fx}$, avec une conftante arbitraire a, comme nous l'avons deja trouvé cy-deffus.

CCCCXCII.

On comprend par ce que nous venons de dire, que, fi on a un divifeur quelconque $a + bb + cb^2$, ou $ab^0 + bb^1 + cb^2 = o$ de l'equation algebrique (K) on en tirera par les fubftitutions préfcrittes (Article CCCCXCI.) l'equation différentielle $ay + \frac{bdy}{dx} + \frac{cddy}{dx^2} = o$, qui donnera une valeur de y en x, laquelle fatisfera a l'equation propofée (H), & on pourra par cette obfervation trouver l'intégrale complette qu'on cherche, lorfque l'equation algebrique (K) a des racines egales entr'elles. Car, fi on fuppofe que le quarré $(f - b)^2$, ou $ffb^0 - 2fb^1 + b^2 = o$ foit un divifeur de l'equation (K), on en tirera par les fubftitutions préfcrittes l'equation différentielle $ffy - \frac{2fdy}{dx}$

$+\frac{ddy}{dx^2}=o$; on cherchera ensuite l'intégrale complette & finie de cette equation, en supposant $y=e^{fx}u$, d'où l'on tirera $\frac{dy}{dx}=fe^{fx}u+\frac{e^{fx}du}{dx}$, & $\frac{ddy}{dx^2}=ffe^{fx}u+\frac{2e^{fx}du}{dx}+\frac{e^{fx}ddu}{dx^2}$; substituant ces valeurs dans l'equation différentielle $ffy-\frac{2fdy}{dx}+\frac{ddy}{dx^2}=o$, elle devient, par la destruction mutuelle de tous les autres termes $\frac{e^{fx}ddu}{dx^2}=o$, ou $ddu=o$. Or, en intégrant cette equation, on trouve d'abord $du=\beta dx$, quantité dans laquelle β est une constante arbitraire; &, en intégrant encore, on a $u=\beta x+\alpha$; α etant une autre constante arbitraire. Substituant donc cette valeur de u dans l'equation supposée $y=e^{fx}u$, on aura $y=e^{fx}\times(\alpha+\beta x)$, valeur de y, qui contient deux constantes arbitraires, & qu'on trouve pour deux racines egales de l'equation algebrique (K).

De même si l'equation (K) a pour diviseur le cube $(f-b)^3$, en le developpant & faisant les substitutions préscrittes, on en deduira l'equation différentielle $f^3y-\frac{3f^2dy}{dx}+\frac{3fddy}{dx^2}-\frac{d^3y}{dx^3}=o$, qui sera contenüe dans la proposée (H), & en supposant $y=e^{fx}u$, on

trouvera par substitutions $d^3 u = o$. En intégrant cette equation, on trouve d'abord $ddu = 2\gamma dx^2$, 2γ etant une constante arbitraire quelconque; en intégrant encore, on a $du = 2\gamma x dx + \beta dx$, β etant une nouvelle constante arbitraire, & enfin en intégrant pour la troisieme fois, on trouve $u = \gamma xx + \beta x + \alpha$, α etant une troisieme constante arbitraire. On aura donc $y = c^{\int x} u = c^{\int x}(\alpha + \beta x + \gamma xx)$, valeur particuliere de y, qui comprend trois constantes arbitraires pour trois racines egales de l'equation (K). On trouvera de la même façon, que, si $(f - b)^4$ est un diviseur de l'equation (K), on aura $y = c^{\int x}(\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3)$, & generalement que, si le diviseur est $(f - b)^k$, la valeur de y sera $c^{\int x}(\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \&c. \ldots\ldots\ldots + \mu x^{k-1})$, de sorte que cette valeur contiendra le nombre K de constantes.

CCCCXCIII.

On ne peut pas doûter que les valeurs de y, telles que nous venons de les trouver par les diviseurs de plusieurs dimensions de l'equation (K) ne satisfassent aussi a l'equation (H), de maniere qu'etant substituées

au lieu de y dans cette equation, elles la rendront identique. Car soit l'equation (M), ou $p+qb+rb^2+sb^3+\&c.=o$, un diviseur composé comme on voudra de l'equation (K); qu'on en forme par les substitutions préscrittes l'equation différentielle (L) $o=py+\frac{qdy}{dx}+\frac{rddy}{dx^2}+\frac{sd^3y}{dx^3}+\&c.$ Il est evident que la valeur complette de y, qui donne l'intégrale de cette equation, se trouve en joignant ensemble toutes les valeurs particulieres de y, qu'on tire des diviseurs simples de l'equation (M). Or les diviseurs simples de cette equation (M) sont aussi les diviseurs simples de l'equation (K): donc la valeur complette de y, qu'on tire du diviseur composé $p+qb+rb^2+sb^3+\&c.$, & qui donne l'intégrale complette de l'equation (L) sera aussi une valeur de y, qui etant substituée dans l'equation différentielle proposée (H) la rendra identique, & donnera une intégrale particuliere de cette equation.

CCCCXCIV.

Nous avons donc trouvé toutes les valeurs possibles de y, dont la somme donne l'intégrale complette réelle & finie de l'equation différentielle proposée (H), lorsque les racines de l'equation algebrique correspondante (K) sont toutes réelles, inégales ou egales. Il ne

ne nous reste plus qu'a trouver ces valeurs particulieres de y, avec le nombre requis de constantes arbitraires, dans le cas où l'equation (K) contient des racines imaginaires. Or on sçait que ces racines imaginaires sont toujours en nombre pair dans l'equation algebrique où elles se trouvent, & qu'elles peuvent toujours être partagées deux par deux, de façon que leur produit & leur somme soient des quantités toutes réelles. Lors donc que l'equation algebrique (K) contiendra des racines imaginaires, elle aura toujours pour diviseur une equation réelle du second degré, de la forme $mm - 2m\,\text{Cos.}\,V.\,b + bb = o$, V etant un angle, ou un arc de cercle, dont le rayon est l'unité (Art. CXLV.), & dont les deux racines imaginaires seront $b = m\,\text{Cos.}\,V + m.\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}$, & $b = m\,\text{Cos.}\,V - m\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}$ (Art. CXLV.). Il n'est donc plus question que de trouver les valeurs particulieres de y, qui repondent aux diviseurs réels de la forme $mm - 2mb.\,\text{Cos.}\,V + bb = o$, & qui contiennent chacun deux constantes arbitraires.

Pour cet effet nous reduirons d'abord par les substitutions préscrittes le diviseur $mm - 2mb.\,\text{Cos.}\,V + bb = o$, a l'equation différentielle $o = mmy - 2m \times \frac{dy}{dx}\,\text{Cos.}\,V + \frac{ddy}{dx^2}$, & nous chercherons l'intégrale de cette equation en supposant $y = e^{mx.\,\text{Cos.}\,V}\,u$, d'où l'on

tire $dy = m\,\text{Cos.}\,V.\,e^{mx.\,\text{Cos.}\,V}\,u\,dx + e^{mx.\,\text{Cos.}\,V}\,du$, & $ddy = mm\,\overline{\text{Cos.}\,V}^2.\,e^{mx.\,\text{Cos.}\,V}\,u\,dx^2 + 2m\,\text{Cos.}\,V. \times e^{mx.\,\text{Cos.}\,V}\,du\,dx + e^{mx.\,\text{Cos.}\,V}\,ddu$. Subſtituant ces valeurs de y, dy, ddy dans l'equation différentielle $o = mmy - 2m\frac{dy}{dx}\,\text{Cos.}\,V + \frac{ddy}{dx^2}$, on la transformera en $o = mme^{mx.\,\text{Cos.}\,V}\,u - 2mm\,\overline{\text{Cos.}\,V}^2\,e^{mx.\,\text{Cos.}\,V}\,u - 2m \times \text{Cos.}\,Ve^{mx.\,\text{Cos.}\,V}\,\frac{du}{dx} + mm\,\overline{\text{Cos.}\,V}^2\,e^{mx.\,\text{Cos.}\,V}\,u + 2m \times \text{Cos.}\,Ve^{mx.\,\text{Cos.}\,V}\,\frac{du}{dx} + e^{mx.\,\text{Cos.}\,V}\,\frac{ddu}{dx^2}$, & en effaçant les termes qui ſe detruiſent, & diviſant par $e^{mx.\,\text{Cos.}\,V}$, on aura $mmu + mm\,\overline{\text{Cos.}\,V}^2.u - 2mm\,\overline{\text{Cos.}\,V}^2\,u + \frac{ddu}{dx^2} = o$, ou $mmu(1 - \overline{\text{Cos.}\,V}^2) + \frac{ddu}{dx^2} = o$, ou bien, par ce que dans le cercle, dont le rayon eſt l'unité, $\overline{\text{Sin.}\,V}^2 = 1 - \overline{\text{Cos.}\,V}^2$, $mm\,\overline{\text{Sin.}\,V}^2\,u + \frac{ddu}{dx^2} = o$, & $mm\,\overline{\text{Sin.}\,V}^2\,u\,dx^2 + ddu = o$. Pour intégrer cette equation, on la multipliera par $2du$, & on aura $mm\,\overline{\text{Sin.}\,V}^2.\,2u\,du\,dx^2 + 2du\,ddu = o$, dont l'intégrale, en ajoutant la conſtante arbitraire du même ordre, $a^2m^2\,\overline{\text{Sin.}\,V}^2\,dx^2$, ſera $mm\,\overline{\text{Sin.}\,V}^2\,uu\,dx^2 + du^2 =$

$a^2 m^2 \overline{\text{Sin.} V}^2 dx^2$; d'où l'on deduit $\frac{du^2}{a^2 - u^2} = m^2 \overline{\text{Sin.} V}^2 \times dx^2$, &, en tirant la racine quarrée, $\frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = m \overline{\text{Sin.} V} dx$. Or $\frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{\frac{du}{a}}{\sqrt{1 - \frac{uu}{aa}}} = ds$, element d'un arc de cercle s, dont le Sinus eſt $\frac{u}{a}$, & le rayon 1. On aura donc $ds = m \text{Sin.} V. dx$, dont l'intégrale, en ajoutant la conſtante arbitraire B, eſt $s = mx \text{Sin.} V + B$. Puis donc que la quantité $mx \text{Sin.} V + B$ peut être priſe pour un arc de cercle, dont le Sinus eſt $\frac{u}{a}$, & le rayon 1, ſi l'on deſigne par $A'(mx \text{Sin.} V + B)$ cet arc de cercle, dont le Sinus eſt $\frac{u}{a}$, on aura $\frac{u}{a} = \text{Sin.} A'(mx. \text{Sin.} V + B)$, & par conſequent $u = a. \text{Sin.} A'(mx. \text{Sin.} V + B)$, & ſubſtituant cette valeur de u dans l'equation ſuppoſée $y = c^{mx. \text{Cos.} V} u$, on aura $y = a c^{mx. \text{Cos.} V} \text{Sin.} A'(mx. \text{Sin.} V + B)$ valeur convenable de y pour les deux racines imaginaires, ou pour le diviſeur $mm - 2mb. \text{Cos.} V + bb = o$.

CCCCXCV.

Ainſi nous avons trouvé toutes les valeurs particulieres de y, dont la ſomme donne l'intégrale complette, réelle, & finie de l'equation différentielle propoſée (H), lorſque les racines de l'equation algebrique correſpondante (K) ſont toutes réelles ou imaginaires, toutes inégales. Toute la difficulté eſt donc reduite preſentement a trouver les valeurs de y, avec le nombre requis de conſtantes arbitraires, dans le cas où l'equation (K) contient des racines imaginaires egales entr'elles, c'eſt a dire, lorſque cette equation (K) a pour diviſeur le quarré ou le cube, ou une autre puiſſance de la quantité réelle $mm - 2mb . \text{Cos.} V + bb = o$. Or puiſque $mm - 2mb . \text{Cos.} V + bb = (b - m \text{Cos.} V - m \text{Sin.} V . \sqrt{-1}) . (b - m \text{Cos.} V + m \text{Sin.} V . \sqrt{-1})$, on aura le quarré $(mm - 2mb . \text{Cos.} V + bb)^2 = (b - m \text{Cos.} V - m \text{Sin.} V . \sqrt{-1})^2 . (b - m \text{Cos.} V + m \text{Sin.} V . \sqrt{-1})^2$, & generalement la puiſſance $(mm - 2mb \text{Cos.} V + bb)^k = (b - m \text{Cos.} V - m \text{Sin.} V . \sqrt{-1})^k . (b - m \text{Cos.} V + m \times \text{Sin.} V . \sqrt{-1})^k$. Il ne s'agit donc plus, que de trouver les valeurs de y, dans le cas ou l'equation (K) a pour diviſeur une puiſſance de la forme $(b - m \text{Cos.} V - m \times \text{Sin.} V . \sqrt{-1})^k \times (b - m \text{Cos.} V + m \text{Sin.} V . \sqrt{-1})^k$.

CCCCXCVI.

Nous avons vû cy–dessus que, si l'equation algebrique (K) a pour diviseurs ou pour facteurs les equations suivantes $b - f = o$, $(b-f)^2 = o$, $(b-f)^3 = o$, $(b-f)^k = o$, les valeurs de y qui repondent a chacune de ces equations, seront respectivement $y = e^{fx}\alpha$, $y = e^{fx}(\alpha + \beta x)$, $y = e^{fx}(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)$, $y = e^{fx}(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c. \ldots\ldots + \nu x^{k-1})$, α, β, γ, δ, &c. & ν etant des constantes arbitraires. Donc, si on fait successivement $f = m \,\text{Cos.}\, V + m \times \text{Sin.}\, V. \sqrt{-1}$, & $f = m \,\text{Cos.}\, V - m \,\text{Sin.}\, V. \sqrt{-1}$, le diviseur simple $b - m \,\text{Cos.}\, V - m \,\text{Sin.}\, V. \sqrt{-1} = o$ de l'equation (K) donnera $y = \alpha e^{mx \,\text{Cos.}\, V + mx \,\text{Sin.}\, V. \sqrt{-1}}$, & le diviseur simple $b - m \,\text{Cos.}\, V + m \,\text{Sin.}\, V. \sqrt{-1} = o$ donnera $y = \alpha' e^{mx \,\text{Cos.}\, V - mx \,\text{Sin.}\, V. \sqrt{-1}}$, α & α' etant deux constantes arbitraires; par consequent le produit de ces deux diviseurs $(b - m \,\text{Cos.}\, V - m \,\text{Sin.}\, V. \sqrt{-1}) . \times (b - m \,\text{Cos.}\, V + m \,\text{Sin.}\, V. \sqrt{-1}) = mm - 2mb \,\text{Cos.}\, V + bb$ donnera $y = \alpha e^{mx \,\text{Cos.}\, V + mx \,\text{Sin.}\, V. \sqrt{-1}} +$

$\alpha' e^{m x \,\text{Cos.}\, V - m x \,\text{Sin.}\, V . \sqrt{-1}} = e^{m x \,\text{Cos.}\, V} (\alpha e^{m x \,\text{Sin.}\, V . \sqrt{-1}} + \alpha' e^{- m x \,\text{Sin.}\, V . \sqrt{-1}})$. Mais nous avons trouvé cy-dessus que le diviseur $mm - 2mb \,\text{Cos.}\, V + bb = 0$ donne $y = \alpha'' e^{m x \,\text{Cos.}\, V} . \text{Sin.}\, A' (m x \,\text{Sin.}\, V + B)$, α'' & B etant deux constantes arbitraires. On aura donc l'egalité $e^{m x \,\text{Cos.}\, V} (\alpha e^{m x \,\text{Sin.}\, V . \sqrt{-1}} + \alpha' e^{- m x \,\text{Sin.}\, V . \sqrt{-1}}) = \alpha'' e^{m x \,\text{Cos.}\, V} \,\text{Sin.}\, A' (m x \,\text{Sin.}\, V + B)$; d'où, en divisant par $e^{m x \,\text{Cos.}\, V}$, on tire $\alpha e^{m x \,\text{Sin.}\, V . \sqrt{-1}} + \alpha' e^{- m x \,\text{Sin.}\, V . \sqrt{-1}} = \alpha'' \,\text{Sin.}\, A' (m x \,\text{Sin.}\, V + B)$, & en multipliant de part & d'autre par x^k, on trouve $\alpha x^k e^{m x \,\text{Sin.}\, V . \sqrt{-1}} + \alpha' x^k e^{- m x \,\text{Sin.}\, V . \sqrt{-1}} = \alpha'' x^k \,\text{Sin.}\, A' (m x \,\text{Sin.}\, V + B)$.

CCCCXCVII.

Supposé presentement que le quarré $(mm - 2mb \times \text{Cos.}\, V + bb)^2$, ou le produit des deux quarrés imaginaires $(b - m \,\text{Cos.}\, V - m \,\text{Sin.}\, V . \sqrt{-1})^2 \times (b - m \times \text{Cos.}\, V + m \,\text{Sin.}\, V . \sqrt{-1})^2$ soit un diviseur de l'equation algebrique (K), & qu'on veuille trouver la valeur de y, qui repond a ce diviseur, on fera $f = m \times \text{Cos.}\, V + m \,\text{Sin.}\, V . \sqrt{-1}$, & ensuite $f = m \,\text{Cos.}\, V - m \times$

$\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}$, & le facteur $(b - m\,\text{Cos.}\,V - m\,\text{Sin.}\,V.\times \sqrt{-1})^2$ donnera (Art. precedent) $y = e^{fx}(\alpha + \beta x) = e^{mx\,\text{Cos.}\,V + mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}}(\alpha + \beta x)$. Le facteur $(b - m\,\text{Cos.}\,V + m\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1})^2$ donnera $y = e^{mx\,\text{Cos.}\,V - mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}}(\alpha' + \beta' x)$. La somme de ces deux valeurs de y donnera la valeur de y, qui repond au quarré proposé $(mm - 2mb\,\text{Cos.}\,V + bb)^2$, cette valeur sera donc $y = e^{mx\,\text{Cos.}\,V + mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}}(\alpha + \beta x) + e^{mx\,\text{Cos.}\,V - mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}}(\alpha' + \beta' x) = e^{mx\,\text{Cos.}\,V} \times (\alpha e^{mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}} + \alpha' e^{-mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}}) + e^{mx\,\text{Cos.}\,V} \times (\beta x e^{mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}} + \beta' x e^{-mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}})$. Or (Article preced.) $\alpha e^{mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}} + \alpha' e^{-mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}} = \alpha''\,\text{Sin.}\,A'(mx\,\text{Sin.}\,V + B')$, & $\beta x e^{mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}} + \beta' x e^{-mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}} = \beta'' x\,\text{Sin.}\,A'(mx\,\text{Sin.}\,V + B'')$; α'', β'', B', B'' etant quatre constantes arbitraires. Donc la valeur de y qui repond au diviseur $(mm - 2mb\,\text{Cos.}\,V + bb)^2$ de l'equation (K) sera $y = e^{mx\,\text{Cos.}\,V}\{\alpha''\,\text{Sin.}\,A' \times (mx\,\text{Sin.}\,V + B') + \beta'' x\,\text{Sin.}\,A'(mx\,\text{Sin.}\,V + B'')\}$.

CCCCXCVIII.

On trouvera de la même maniere la valeur de y, qui repond au diviseur $(mm - 2mb\,\text{Cos.}\,V + bb)^k$, ou $(b - m\,\text{Cos.}\,V - m\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1})^k \times (b - m\,\text{Cos.}\,V + m\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1})^k$. Car en substituant $m\,\text{Cos.}\,V + m \times \text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}$ au lieu de f dans l'equation $y = e^{fx}(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c. \ldots\ldots + \nu x^{k-1})$, on trouve que le facteur $(b - m\,\text{Cos.}\,V - m\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1})^k$ donne $y = e^{mx\,\text{Cos.}\,V + mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}}(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c. \ldots + \nu x^{k-1})$; & en substituant $m\,\text{Cos.}\,V - m\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}$ au lieu de f dans l'equation $y = e^{fx}(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \delta' x^3 + \&c. \ldots + \nu' x^{k-1})$, on trouve que l'autre facteur $(b - m\,\text{Cos.}\,V + m\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1})^k$ donne $y = e^{mx\,\text{Cos.}\,V - mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}}(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \delta' x^3 + \&c. \ldots + \nu' x^{k-1})$; la somme de ces deux valeurs de y sera la valeur de y, qui repond au diviseur proposé $(mm - 2m\,\text{Cos.}\,V.b + bb)^k$; par consequent cette valeur sera $y = e^{mx\,\text{Cos.}\,V} \times e^{mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}}(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c. \ldots\ldots + \nu x^{k-1}) + e^{mx\,\text{Cos.}\,V} \times e^{-mx\,\text{Sin.}\,V.\sqrt{-1}}(\alpha' +$

$\beta' x +$

$\beta' x + \gamma' x^2 + \delta' x^3 + \&c. \ldots\ldots + \nu' x^{k-1}) = e^{mx \text{Cos.} V} \times$ $(\alpha e^{mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}} + \alpha' e^{-mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}} + \beta x e^{mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}}$ $+ \beta' x e^{-mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}} + \gamma x^2 e^{mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}} +$ $\gamma' x^2 e^{-mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}} + \delta x^3 e^{mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}} +$ $\delta' x^3 e^{-mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}} + \&c. \ldots\ldots\ldots + \nu x^{k-1} \times$ $e^{mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}} + \nu' x^{k-1} e^{-mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}})$. Or $\alpha e^{mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}} + \alpha' e^{-mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}} = \alpha'' \text{Sin.} A' (mx \times$ $\text{Sin.} V + B')$; $\beta x e^{mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}} + \beta' x e^{-mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}}$ $= \beta'' x \text{Sin.} A' (mx \text{Sin.} V + B'')$; $\gamma x^2 e^{mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}} +$ $\gamma' x^2 e^{-mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}} = \gamma'' x^2 \text{ Sin.} A' (mx \text{Sin.} V + B''')$; &c., & generalement $\nu x^{k-1} e^{mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}} + \nu' x^{k-1} \times$ $e^{-mx \text{Sin.} V. \sqrt{-1}} = \nu'' x^{k-1} \text{ Sin.} A' (mx \text{Sin.} V + C')$; α'', β'', γ'', &c., B', B'', B''', &c., & C' etant des constantes arbitraires. Donc la valeur de y, qui repond au diviseur de l'equation (K) $(mm - 2mb \text{Cos.} V + bb)^k$ sera $y = e^{mx \text{Cos.} V} \{ \alpha'' \text{Sin.} A' (mx \text{Sin.} V + B') +$ $\beta'' x \text{Sin.} A' (mx \text{Sin.} V + B'') + \gamma'' x^2 \text{Sin.} A' (mx \text{Sin.} V +$ $B''') + \delta'' x^3 \text{Sin.} A' (mx \text{Sin.} V + B^{IV}) + \&c. \ldots\ldots\ldots +$ $\nu'' x^{k-1} \text{ Sin.} A' (mx \text{Sin.} V + C') \}$.

CCCCXCIX.

Il ſuit de ce que nous avons dit juſqu'icy que, ſi on reſout toute l'equation algebrique (K) en facteurs réels, tels que $b-f=0$, $bb-2mb\,\text{Cos.}\,V+mm=0$, ou leurs puiſſances $(b-f)^k=0$, $(bb-2mb\,\text{Cos.}\,V+mm)^k=0$, la valeur de y, qu'on tirera de chaque facteur ſimple $b-f=0$ contiendra une conſtante arbitraire; celle qu'on tirera de chaque facteur de deux dimenſions, $bb-2mb\,\text{Cos.}\,V+mm$, contiendra deux conſtantes arbitraires; celle qu'on tirera de chaque puiſſance $(bb-2mb\,\text{Cos.}\,V+mm)^k=0$ contiendra le nombre $2k$ de conſtantes arbitraires, de ſorte que chaque facteur donnera une valeur de y, qui renfermera autant de conſtantes arbitraires que ce facteur aura de dimenſions; par conſequent la ſomme de toutes ces valeurs particulieres de y renfermera autant de conſtantes arbitraires, qu'il y aura de dimenſions dans le produit de tous ces facteurs, c'eſt a dire, dans l'equation (K), ou qu'il y aura d'unités dans ſon expoſant; & cette ſomme donnera l'intégrale complette, réelle, & finie de l'equation différentielle propoſée (H).

D.

Il ſuit de plus que cette intégrale ne dependra que des quadratures de l'hyperbole & du cercle, & que dans tous les cas particuliers on pourra la trouver par les tables des logarithmes, & par celles des Sinus. Elle dependra des logarithmes ſeulement dans le cas où l'equation algebrique (*K*) ne contiendra que des racines réelles, ou qu'elle pourra ſe reſoudre toute entiere en facteurs réels, tels que $b-f$, ou $(b-f)^k$; elle dependra des ſinus d'arcs de cercle ſeulement, dans le cas où l'equation (*K*) ne contiendra que des racines imaginaires, ou qu'elle pourra ſe reſoudre toute entiere en facteurs réels, tels que, $bb-2mb\text{Cos.}V+mm$, ou $(bb-2mb\text{Cos.}V+mm)^k$; enfin elle dependra des logarithmes, & des ſinus d'arcs de cercle, ou de la quadrature de l'hyperbole, & de celle du cercle, dans le cas où l'equation (*K*) aura des racines réelles, & des racines imaginaires, ou qu'elle pourra ſe reſoudre partie en facteurs réels, tels que $b-f$, & $(b-f)^k$, partie en facteurs réels, tels que $bb-2mb\text{Cos.}V+mm$, & $(bb-2mb\text{Cos.}V+mm)^k$. Nous allons appliquer toute cette theorie aux Problemes ſuivants.

DI.

PROBLEME I. Trouver l'intégrale complette en termes finis & réels de l'equation différentielle (H), $o = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} + \&c. \ldots + \frac{N\,d^ny}{dx^n}$, dans laquelle la différence dx est constante, & les coefficiens $A, B, C, D, \&c. \ldots N$ sont aussi des quantités constantes ou zero.

SOLUTION. I.° On ecrira dans l'equation différentielle proposée 1 au lieu de y, b au lieu de $\frac{dy}{dx}$, bb au lieu de $\frac{ddy}{dx^2}$, & generalement b^k au lieu de $\frac{d^ky}{dx^k}$; & on en formera l'equation algebrique (K), ou $o = A + Bb + Cb^2 + Db^3 + \&c. \ldots + Nb^n$, du degré n.

2.° On decomposera toute cette equation en facteurs réels, tels que $b - f = o$, $(b - f)^k = o$, $bb - 2mb\,\mathrm{Cos}.V + mm = o$, $(bb - 2mb\,\mathrm{Cos}.V + mm)^k = o$.

3.° On cherchera les valeurs particulieres de y, qui repondent a chacun de ces facteurs, & chaque facteur simple, comme $b - f = o$, qui n'a point d'autre facteur egal, donnera $y = e^{fx}\alpha$; chaque facteur composé de plusieurs facteurs simples & egaux entr'eux, comme $(b - f)^k = o$, donnera $y = e^{fx}(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$

&c.....$+\nu x^{k-1}$); chaque facteur de deux dimensions, comme $bb - 2mb\,\mathrm{Cos}.\,V + mm = o$, qui n'a point d'autre egal donnera $y = e^{mx\,\mathrm{Cos}.\,V}$ $\{ \alpha\,\mathrm{Sin}.\,A'(mx\,\mathrm{Sin}.\,V + B')\}$; chaque facteur composé de plusieurs de ces facteurs de deux dimensions egaux entr'eux, comme $(bb - 2mb\,\mathrm{Cos}.\,V + mm)^k = o$, donnera $y = e^{mx\,\mathrm{Cos}.\,V} \times$ $\{\alpha\,\mathrm{Sin}.\,A'(mx\,\mathrm{Sin}.\,V + B') + \beta x\,\mathrm{Sin}.\,A'(mx\,\mathrm{Sin}.\,V + C') + \gamma x^2\,\mathrm{Sin}.\,A'(mx\,\mathrm{Sin}.\,V + D') + \delta x^3\,\mathrm{Sin}.\,A'(mx\,\mathrm{Sin}.\,V + E') +$ &c...... $+ x^{k-1}\,\mathrm{Sin}.\,A'(mx\,\mathrm{Sin}.\,V + N)\}$ les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c., B', C', D', E', &c., N' signifiant des constantes arbitraires; $\mathrm{Sin}.\,V$ signifiant le sinus d'un arc, ou d'un angle V, dont le rayon est l'unité, & $\mathrm{Sin}.\,A'(mx\,\mathrm{Sin}.\,V + M')$ signifiant le sinus d'un arc, ou d'un angle $= mx\,\mathrm{Sin}.\,V + M'$ pris dans le méme cercle dont le rayon est 1.

4.° On fera la somme de toutes ces valeurs particulieres de y, & on l'egalera a y. Cette equation sera l'intégrale complette, réelle, & finie de l'equation différentielle proposée (H). *C. Q. F. T.*

DII.

EXEMPLE I. Trouver l'intégrale complette de l'equation différentielle du second ordre $o = ay + \frac{bdy}{dx} + \frac{cddy}{dx^2}$.

En ecrivant dans cette equation 1 pour y, b pour $\frac{dy}{dx}$, & bb pour $\frac{ddy}{dx^2}$, on forme l'equation algebrique $o = a + bb + cbb$, ou, en divisant par c, $bb + \frac{bb}{c} + \frac{a}{c} = o$. Cette equation est composée de deux facteurs simples, $b + \frac{b}{2c} + \frac{\sqrt{bb - 4ac}}{2c} = o$, & $b + \frac{b}{2c} - \frac{\sqrt{bb - 4ac}}{2c} = o$, qui seront réels & inégaux si $bb > 4ac$; ils seront réels & egaux, si $bb = 4ac$, & ils seront imaginaires, si $bb < 4ac$.

Dans le premier Cas on comparera l'un aprés l'autre ces deux facteurs avec la formule $b - f = o$, qui donne $y = \alpha e^{fx}$. Par la comparaison du premier facteur on trouve $f = \frac{-b - \sqrt{bb - 4ac}}{2c}$; par consequent $y = \alpha e^{\frac{-bx - x\sqrt{bb - 4ac}}{2c}}$. Par la comparaison du second facteur on trouve $f = \frac{-b + \sqrt{bb - 4ac}}{2c}$, & $y = \beta e^{\frac{-bx + x\sqrt{bb - 4ac}}{2c}}$. La sommè de ces deux valeurs particulieres de y donnera l'intégrale cherchée

$$y = \alpha e^{\frac{-bx - x\sqrt{bb - 4ac}}{2c}} + \beta e^{\frac{-bx + x\sqrt{bb - 4ac}}{2c}}.$$

Dans le second Cas, ou $bb = 4ac$, & $b = 2\sqrt{ac}$, l'equation différentielle proposée sera $o = ay + \frac{2dy}{dx}\sqrt{ac} + \frac{cddy}{dx^2}$, & l'equation algebrique $bb + 2b\sqrt{\frac{a}{c}} + \frac{a}{c} = \left(b + \sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2 = o$. On la comparera avec la formule $(b-f)^2 = o$, qui donne $y = e^{fx}(\alpha + \beta x)$, & on aura $f = -\sqrt{\frac{a}{c}}$, & pour l'intégrale cherchée $y = e^{-x\sqrt{\frac{a}{c}}}(\alpha + \beta x)$.

Dans le troisieme Cas des facteurs imaginaires, on comparera l'equation $bb + \frac{bb}{c} + \frac{a}{c} = o$ avec la formule $bb - 2mb\,\text{Cos.}\,V + mm = o$, qui donne $y = e^{mx\,\text{Cos.}\,V}\{\alpha\,\text{Sin.}\,A'(mx\,\text{Sin.}\,V + B')\}$, & on aura $mm = \frac{a}{c}$; $-2m\,\text{Cos.}\,V = \frac{b}{c}$; d'où l'on tire $m = \sqrt{\frac{a}{c}}$; $\text{Cos.}\,V = -\frac{b}{2mc} = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$, & $\text{Sin.}\,V = \frac{\sqrt{4ac-bb}}{2\sqrt{ac}}$, a cause que dans le cercle, dont le rayon est 1, $\text{Sin.}\,V = \sqrt{1 - \overline{\text{Cos.}\,V}^2}$. L'intégrale cherchée sera donc $y = e^{-\frac{bx}{2c}}\{\alpha\,\text{Sin.}\,A'\left(\frac{x\sqrt{4ac-bb}}{2c} + B'\right)\}$.

DIII.

EXEMPLE II. Trouver l'intégrale complette de l'equation différentielle du troisieme ordre, $o = y - \frac{3a^2 ddy}{dx^2} + \frac{2a^3 d^3 y}{dx^3}$.

On trouve par les substitutions préscrittes cette equation algebrique $o = 1 - 3a^2 b^2 + 2a^3 b^3$, ou, en divisant par $2a^3$, $b^3 - \frac{3b^2}{a} + \frac{1}{2a^3} = o$. Cette equation se resout en deux facteurs, $b + \frac{1}{2}a = o$, & $\left(b - \frac{1}{a}\right)^2 = o$. Le premier facteur simple etant comparé avec la formule $b - f = o$ donne $f = -\frac{1}{2}a$, & $y = \alpha e^{fx} = \alpha e^{-\frac{x}{2a}}$. L'autre facteur etant comparé avec la formule $(b-f)^2 = o$ donne $f = \frac{1}{a}$, & $y = e^{fx}(\beta + \gamma x) = e^{\frac{x}{a}}(\beta + \gamma x)$. Donc l'intégrale complette sera $y = \alpha e^{-\frac{x}{2a}} + e^{\frac{x}{a}}(\beta + \gamma x)$.

DIV.

EXEMPLE III. Intégrer l'equation différentielle $o = y - \frac{a^3 d^3 y}{dx^3}$.

L'equa-

L'equation algebrique, qu'on trouve par les ſubſtitutions préſcrittes, eſt $o = 1 - a^3 b^3$, ou $b^3 - \frac{1}{a^3} = o$, qui ſe reſout en ces deux facteurs, $b - \frac{1}{a} = o$, & $bb + \frac{b}{a} + \frac{1}{aa} = o$. Le premier facteur ſimple, etant comparé avec la formule $b - f = o$, donne $f = \frac{1}{a}$, & $y = \alpha e^{\frac{x}{a}}$; l'autre facteur, ne pouvant ſe reſoudre en facteurs ſimples & réels, doit être comparé avec la formule $bb - 2mb\,\text{Cos.}\,V + mm = o$. Cette comparaiſon donne $m = \frac{1}{a}$, & $\text{Cos.}\,V = -\frac{1}{2}$; d'où l'on tire $\text{Sin.}\,V = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a cauſe de $\text{Sin.}\,V = \sqrt{1 - \overline{\text{Cos.}\,V}^2}$. On aura donc $y = e^{mx\,\text{Cos.}\,V}\{\beta\,\text{Sin.}\,A'(mx\,\text{Sin.}\,V + B')\} = e^{-\frac{x}{2a}}\{\beta\,\text{Sin.}\,A' \times (\frac{x\sqrt{3}}{2a} + B')\}$. L'intégrale complette ſera $y = \alpha e^{\frac{x}{a}} + \beta e^{-\frac{x}{2a}}\,\text{Sin.}\,A'(\frac{x\sqrt{3}}{2a} + B')$.

DV.

Exemple IV. Intégrer l'equation différentielle du quatrieme ordre $o = y - \frac{a^4 d^4 y}{dx^4}$.

On en formera par fubftitution l'equation algebrique $o = 1 - a^4 b^4$, ou $o = b^4 - \frac{1}{a^4} = \left(b - \frac{1}{a}\right) \times \left(b + \frac{1}{a}\right)\left(bb + \frac{1}{aa}\right)$. Les deux facteurs fimples & réels $b - \frac{1}{a} = o$, & $b + \frac{1}{a} = o$ donnent $y = \alpha e^{\frac{x}{a}} + \beta e^{-\frac{x}{a}}$. Le troifieme facteur $bb + \frac{1}{aa} = o$, etant comparé avec la formule $bb - 2mb\,\text{Cos.}\,V + mm = o$, donne $m = \frac{1}{a}$, & $\text{Cos.}\,V = o$; d'où l'on tire $\text{Sin.}\,V = 1$, a caufe de $\text{Sin.}\,V = \sqrt{1 - \overline{\text{Cos.}\,V}^2}$. Or la formule $bb - 2mb\,\text{Cos.}\,V + mm = o$ donne $y = e^{mx\,\text{Cos.}\,V} . \times \gamma\,\text{Sin.}\,A'(mx\,\text{Sin.}\,V + B') = \gamma\,\text{Sin.}\,A'\left(\frac{x}{a} + B'\right)$ dans le cas prefent a caufe de l'expofant $mx\,\text{Cos.}\,V = o$, qui rend $e^{mx\,\text{Cos.}\,V} = 1$. Donc l'intégrale complette de l'equation différentielle propofée fera $y = \alpha e^{\frac{x}{a}} + \beta e^{-\frac{x}{a}} + \gamma\,\text{Sin.}\,A'\left(\frac{x}{a} + B'\right)$.

DVI.

EXEMPLE V. Intégrer l'equation différentielle $o = y + \frac{a^4 d^4 y}{dx^4}$.

L'equation algebrique qui en resulte par les substitutions est $o = 1 + a^4 b^4$; d'où l'on tire $o = b^4 + \frac{1}{a^4}$ $= \left(bb + \frac{b\sqrt{2}}{a} + \frac{1}{aa}\right)\left(bb - \frac{b\sqrt{2}}{a} + \frac{1}{aa}\right)$. En comparant chacun de ces facteurs avec la formule $bb - 2m \,\text{Cos.}\, V + mm = o$, on trouve pour tous les deux $m = \frac{1}{a}$, pour le premier $m \,\text{Cos.}\, V = -\frac{1}{a\sqrt{2}}$, & pour le second $m \,\text{Cos.}\, V = \frac{1}{a\sqrt{2}}$; par consequent pour tous les deux $m \,\text{Sin.}\, V = \frac{1}{a\sqrt{2}}$. Il resulte de là que l'intégrale complette de l'equation différentielle proposée sera $y = \alpha e^{-\frac{x}{a\sqrt{2}}} \,\text{Sin.}\, A'\left(\frac{x}{a\sqrt{2}} + B'\right) + \beta e^{\frac{x}{a\sqrt{2}}} \,\text{Sin.}\, A' \times$ $\left(\frac{x}{a\sqrt{2}} + C'\right)$.

DVII.

EXEMPLE VI. Trouver l'intégrale complette de l'equation différentielle d'un ordre quelconque $o = \frac{d^n y}{dx^n}$.

L'equation algebrique qui en resulte est $o = h^n$. Or toutes les racines de cette equation etant egales entr'elles, on doit la comparer avec la formule $(h - f)^k = o$, & on aura $k = n$, & $f = o$; par consequent $c^{fx} = c^o = 1$, & l'intégrale complette sera $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c. \ldots\ldots + \nu x^{n-1}$.

On trouve la même intégrale complette, mais d'une maniere beaucoup plus longue, par la methode ordinaire. Car par la premiere intégration on trouve $\alpha = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$; multipliant cette equation par dx, on aura $\alpha dx = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, & en intégrant une seconde fois on trouve $\alpha x + \beta = \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$; multipliant encore par dx, on aura $\alpha x dx + \beta dx = \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-3}}$; & en intégrant pour la troisieme fois, on trouve $\frac{1}{2}\alpha xx + \beta x + \gamma = \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}$; & continuant ainsi d'intégrer le nombre de fois n, & changeant les expressions des constantes arbitraires, on trouvera la même intégrale complette que nous avons determinée cy-dessus.

DVIII.

REMARQUE I. Si on prend un nombre quelconque de facteurs réels d'une ou de deux dimensions, ou leurs puissances, comme $b+a$, $bb+ab+c$, $(b+a)^k$, $(bb+ab+c)^k$, & qu'on egale leur produit a zero, on aura une equation algebrique de la forme (K), dont on connoitra tous les facteurs réels; substituant ensuite dans les termes de cette equation y pour b^0, $\frac{dy}{dx}$ pour b, $\frac{ddy}{dx^2}$ pour b^2, & generalement $\frac{d^ny}{dx^n}$ pour b^n, on en formera une equation différentielle de la forme (H), & de l'ordre qu'on voudra, dont on trouvera facilement l'intégrale par le Probleme precedent, & on pourroit de cette maniere construire une Table generale des différentielles de tous les ordres de la forme (H) & de leurs intégrales respectives, en prenant des facteurs convenables. Supposé, par exemple, qu'on prenne les trois facteurs réels, $b+1$, $bb+b+1$, & $(bb-b+1)^2$, & qu'on egale leur produit a zero, on aura l'equation algebrique du septieme degré, $o=1+bb+b^3+b^4+b^5+b^7$, dont on formera par les substitutions préscrittes l'equation différentielle du septieme or-

dre, $o = y + \frac{ddy}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^5y}{dx^5} + \frac{d^7y}{dx^7}$. On trouvera l'intégrale complette de cette equation, en cherchant les valeurs particulieres de y, qui repondent a chacun des trois facteurs qu'on a choisi, & en egalant la somme de ces valeurs particulieres a la variable y. Le premier facteur $b+1$ donnera $y = \alpha e^{-x}$; le second facteur $bb+b+1$ donnera $y = \beta e^{-\frac{x}{2}} \text{Sin.} A'\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + B'\right)$; le troisieme facteur $(bb-b+1)^2$ donnera $y = \gamma e^{\frac{x}{2}} \times \text{Sin.} A'\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + C'\right) + \delta x e^{\frac{x}{2}} \text{Sin.} A'\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + D'\right)$; par consequent l'intégrale complette sera $y = \alpha e^{-x} + \beta e^{-\frac{x}{2}} \text{Sin.} A'\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + B'\right) + \gamma e^{\frac{x}{2}} \text{Sin.} A'\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + C'\right) + \delta x e^{\frac{x}{2}} \text{Sin.} A'\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + D'\right)$. On peut aussi prendre b, ou sa puissance quelconque b^k pour un des facteurs réels, dont le produit forme l'equation algebrique (K), & en comparant le facteur b avec la formule $b-f$, on aura $f = o$, & la valeur de y, qui repond au facteur b, sera $y = \alpha e^{fx} = \alpha$, a cause

de l'expoſant $fx = o$. De même en comparant le facteur b^k avec la formule $(b-f)^k$, on aura $f = o$, & $y = \alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 \ldots\ldots + \nu x^{k-1}$.

DIX.

REMARQUE II. Nous avons donné dans l'Art. III. de la premiere Partie des methodes generales, & des Tables pour reſoudre en facteurs réels d'une ou de deux dimenſions le binome $b^n \pm c^n$, & le trinome $b^{2n} \pm a c^n b^n \pm c^{2n}$, lorſque n eſt un nombre entier poſitif quelconque. Donc, ſi on ſuppoſe $b^n \pm c^n = o$, & $b^{2n} \pm a c^n b^n \pm c^{2n} = o$, & que dans ces deux equations algebriques on ſubſtitue y pour b^o, $\frac{d^n y}{dx^n}$ pour b^n, & $\frac{d^{2n} y}{dx^{2n}}$ pour b^{2n}, on aura les deux equations différentielles de la forme (H), $\frac{d^n y}{dx^n} \pm c^n y = o$, & $\frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} \pm \frac{a c^n d^n y}{dx^n} \pm c^{2n} y = o$, dont on pourra toujours trouver les intégrales complettes par le Probleme precedent. Il eſt bon d'obſerver icy que, ſi les deux equations algebriques etoient $b^{-n} \pm c^{-n} = o$, & $b^{-2n} \pm a c^{-n} \times$

$b^{-n} \pm c^{-2n} = o$, on les reduiroit facilement a la forme des deux premieres $b^n \pm c^n = o$, & $b^{2n} \pm a c^n b^n \pm c^{2n} = o$, dans lesquelles n est un nombre entier positif. Car, en multipliant toute l'equation $b^{-n} \pm c^{-n} = o$ par $c^n b^n$, on la change en $c^n \pm b^n = o$, d'où l'on tire facilement $b^n \pm c^n = o$; & de même, en multipliant l'autre equation par $c^{2n} b^{2n}$, on la changera en $c^{2n} \pm a c^n b^n \pm b^{2n} = o$, d'où l'on tire aisément $b^{2n} \pm a c^n b^n \pm c^{2n} = o$. Il ne s'agit donc plus, que d'intégrer les deux equations $\frac{d^n y}{d x^n} \pm c^n y = o$, & $\frac{d^{2n} y}{d x^{2n}} \pm \frac{a c^n d^n y}{d x^n} \pm c^{2n} y = o$, dans lesquelles n est un nombre entier positif, & dx constante; c'est ce que nous allons faire en detail dans les Problemes suivants.

D X.

PROBLEME II. Trouver l'intégrale complette de l'equation différentielle $o = c^n y - \frac{d^n y}{d x^n}$.

SOLUTION. On la reduit d'abord a l'equation algebrique $o = c^n - b^n$, ou $b^n - c^n = o$, qui est toujours divisible par $b - c = o$, quelque soit le nombre n pair

n pair ou impair, &, ſi ce nombre eſt pair, elle a de plus $b+c=o$ pour facteur ſimple. Il ſuit de là, qu'on aura toujours la valeur particuliere $y=e^{cx}$, quelque ſoit le nombre n, & ſi ce nombre eſt pair, on aura de plus l'autre valeur particuliere $y=e^{-cx}$. Tous les autres facteurs ſimples de l'equation $b^n-c^n=o$ ſont imaginaires, & ils ſont tous contenus dans les facteurs réels de deux dimenſions, qu'on trouve par la formule generale $bb-2cb.\times \text{Cos.}\frac{2\mu\pi}{n}+cc=o$ (Art. CLXIII.), dans laquelle π deſigne la demie circonference d'un cercle, dont le rayon eſt 1., & 2μ un nombre pair quelconque pas plus grand que n, par conſequent $2\mu\pi$ un arc du même cercle au rayon 1.

Comparant cette formule generale $bb-2cb.\text{Cos.}\frac{2\mu\pi}{n}+cc=o$ avec le facteur trinome $bb-2mb.\text{Cos.}V+mm=o$, on trouve $m=c$, $\text{Cos.}V=\text{Cos.}\frac{2\mu\pi}{n}$, $V=\frac{2\mu\pi}{n}$, & $\text{Sin.}V=\text{Sin.}\frac{2\mu\pi}{n}$, de ſorte que le facteur

$bb - 2cb.\text{Cos.}\frac{2\mu\pi}{n} + cc = bb - 2mb\text{Cos.}V + mm = o$ donnera $y = \alpha e^{mx\text{Cos.}V}\ \text{Sin.}A'(mx\text{Sin.}V + B') = \alpha e^{cx\text{Cos.}\frac{2\mu\pi}{n}}\ \text{Sin.}A'(cx\text{Sin.}\frac{2\mu\pi}{n} + B')$. Or, comme on trouve (Art. CLXIII.) tous les facteurs réels de deux dimensions du binome $b^n - c^n$, en substituant successivement au lieu de 2μ tous les nombres pairs plus petits que n dans la formule generale $bb - 2cb \times \text{Cos.}\frac{2\mu\pi}{n} + cc = o$; si on fait successivement les mêmes substitutions dans la valeur generale $y = \alpha e^{cx.\text{Cos.}\frac{2\mu\pi}{n}} \times \text{Sin.}A'(cx\text{Sin.}\frac{2\mu\pi}{n} + B')$, on aura les valeurs particulieres de y, qui repondent a tous les facteurs réels de deux dimensions du binome $b^n - c^n = o$. La valeur particuliere de y, sçavoir $y = \alpha c^{cx}$, qui repond au facteur simple $b - c$ sera aussi contenue dans la valeur generale $y = \alpha e^{cx.\text{Cos.}\frac{2\mu\pi}{n}}\ \text{Sin.}A'(cx\text{Sin.}\frac{2\mu\pi}{n} + B')$. Car, en faisant $2\mu = o$, on aura $\text{Cos.}\frac{2\mu\pi}{n} = \text{Cos.}o = 1$; $\text{Sin.}\frac{2\mu\pi}{n} = o$, & la valeur generale de y deviendra $y = \alpha e^{cx}\ \text{Sin.}A'(B')$, qu'on peut exprimer par $\alpha' c^{cx}$, en

faiſant le produit des deux conſtantes arbitraires α & $\text{Sin.}B' = \alpha'$, ou en l'exprimant par une ſeule conſtante arbitraire α. De même, ſi n eſt un nombre pair, la valeur particuliere de y, ſçavoir $y = \alpha e^{-cx}$, qui repond au facteur ſimple $b + c$ ſera encore contenue dans la valeur generale $y = \alpha e^{cx.\text{Cos.}\frac{2\mu\pi}{n}} \text{Sin.}A'(cx\,\text{Sin.}\frac{2\mu\pi}{n} + B')$.

Car en faiſant $2\mu = n$, on aura $\text{Cos.}\frac{2\mu\pi}{n} = \text{Cos.}\,\pi = -1$, & $\text{Sin.}\frac{2\mu\pi}{n} = \text{Sin.}\,\pi = 0$, & la valeur generale $y = \alpha e^{cx.\text{Cos.}\frac{2\mu\pi}{n}} \text{Sin.}A'(cx\,\text{Sin.}\frac{2\mu\pi}{n} + B')$ deviendra $y = \alpha e^{-cx}\,\text{Sin.}A'(B')$, qu'on peut exprimer par $y = \alpha e^{-cx}$, en mettant la conſtante arbitraire α au lieu du produit $\alpha\,\text{Sin.}\,A'(B')$.

On trouvera donc toutes les valeurs particulieres de y, ſi dans la valeur generale $y = \alpha e^{cx\,\text{Cos.}\frac{2\mu\pi}{n}} \times \text{Sin.}A'\left(cx\,\text{Sin.}\frac{2\mu\pi}{n} + B'\right)$ on ſubſtitue ſucceſſivement au lieu de 2μ tous les nombres de la ſuite 0, 2, 4, 6, 8, &c. juſqu'a n incluſivement, lorſque n eſt un nombre pair, & juſqu'a n excluſivement, lorſque n eſt impair. Donc en faiſant la ſomme de toutes les va-

leurs particulieres de y, on aura pour l'intégrale complette de l'equation différentielle proposée $y = \alpha e^{cx} + \beta e^{cx \,\text{Cos.}\, \frac{2\pi}{n}} \,\text{Sin.}\, A'\left(cx \,\text{Sin.}\, \frac{2\pi}{n} + B'\right) + \gamma e^{cx \,\text{Cos.}\, \frac{4\pi}{n}} \times \text{Sin.}\, A'\left(cx \,\text{Sin.}\, \frac{4\pi}{n} + C'\right) + \delta e^{cx \,\text{Cos.}\, \frac{6\pi}{n}} \,\text{Sin.}\, A'\left(cx \times \text{Sin.}\, \frac{6\pi}{n} + D'\right) +$ &c., en continuant les termes de cette suite, jusqu'a ce qu'elle renferme le nombre n de constantes arbitraires, ou, ce qui revient au même, jusqu'a ce que le coefficient de π, ou $\frac{2\mu}{n}$ devienne plus grand que l'unité. Si n est un nombre impair, le dernier terme de cette suite sera $\nu e^{cx \,\text{Cos.}\, \frac{\overline{n-1}.\pi}{n}} \times \text{Sin.}\, A'\left(cx \,\text{Sin.}\, \frac{\overline{n-1}.\pi}{n} + N'\right)$. Car, si n est un nombre impair, $n-1$ sera le nombre pair le plus grand de la suite 0, 2, 4, 6, &c., jusqu'a n exclusivement; &, si n est un nombre pair, le nombre n sera le plus grand de la suite 0, 2, 4, 6, &c., jusqu'a n inclusivement.

Donc, quelque soit le nombre n, on trouvera facilement l'intégrale complette de l'equation différentielle proposée. *C. Q. F. T.*

EXEMPLE I. On demande l'intégrale complette de l'equation différentielle du quatrieme ordre $o = y - \frac{d^4 y}{d x^4}$.

En comparant cette equation différentielle avec l'equation generale $o = c^n y - \frac{d^n y}{d x^n}$ on trouve $n = 4$, & $c = 1$. Donc l'intégrale complette sera $y = \alpha e^x + \beta e^{x \,\text{Cos.}\, \frac{\pi}{2}} \,\text{Sin.}\, A' \left(x \,\text{Sin.}\, \frac{\pi}{2} + B' \right) + \gamma e^{x.\,\text{Cos.}\,\pi} \,\text{Sin.}\, A' \times (x \,\text{Sin.}\, \pi + C') = \alpha e^x + \beta \,\text{Sin.}\, A' (x + B') + \gamma' e^{-x}$; puisque $\text{Cos.}\, \frac{\pi}{2} = o$, $\text{Sin.}\, \frac{\pi}{2} = 1$, $\text{Cos.}\, \pi = -1$, & $\text{Sin.}\, \pi = o$.

EXEMPLE II. On demande l'intégrale de cette equation différentielle du cinquieme ordre $o = y - \frac{d^5 y}{d x^5}$.

En la comparant avec l'equation différentielle $o = c^n y - \frac{d^n y}{d x^n}$, on trouve $n = 5$, & $c = 1$. Donc l'intégrale complette sera $y = \alpha e^x + \beta e^{x \,\text{Cos.}\, \frac{2\pi}{5}} \,\text{Sin.}\, A' \times \left(x \,\text{Sin.}\, \frac{2\pi}{5} + B' \right) + \gamma e^{x \,\text{Cos.}\, \frac{4\pi}{5}} \,\text{Sin.}\, A' \left(x \,\text{Sin.}\, \frac{4\pi}{5} + C' \right)$ ou $y = \alpha e^x + \beta e^{x \,\text{Cos.}\, 72.^\circ} \,\text{Sin.}\, A' (x \,\text{Sin.}\, 72^\circ + B') +$

$\gamma e^{x \operatorname{Cos.} 144.^\circ} \operatorname{Sin.} A' (x \operatorname{Sin.} 36.^\circ + C')$. Car puifque 2π eft la circonference du cercle de $360.^\circ$, $\frac{2\pi}{5}$ fera de $72.^\circ$, & $\frac{4\pi}{5}$ de $144.^\circ$. Or $\operatorname{Cos.} 144^\circ = - \operatorname{Sin.} 36^\circ$, & $\operatorname{Sin.} 144^\circ = \operatorname{Sin.} 36^\circ$.

DXI.

PROBLEME III. Trouver l'intégrale complette de l'equation différentielle $o = c^n y + \frac{d^n y}{d x^n}$.

SOLUTION. Cette différentielle fe reduit par les fubftitutions préfcrittes a l'equation algebrique $b^n + c^n = o$, qui, dans les cas où n eft un nombre impair a pour divifeur fimple $b + c = o$, d'où l'on tire $y = a e^{-cx}$. Tous les autres divifeurs fimples font imaginaires, & ils font tous contenus dans les facteurs réels de deux dimenfions, qu'on trouve par la formule generale $bb - 2cb \operatorname{Cos.} \frac{\overline{2\mu + 1} . \pi}{n} + cc = o$, en fubftituant dans la fraction $\frac{\overline{2\mu + 1} . \pi}{n}$ tous les nombres impairs plus petits que n au lieu de $2\mu + 1$ (Art. CLXI.). En comparant cette formule generale avec le trinome $bb -$

$2\,m\,b\,\text{Cos.}\,V + m\,m = o$, on trouve $m = c$; $\text{Cos.}\,V = \text{Cos.}\,\frac{\overline{2\mu+1}.\pi}{n}$; $V = \frac{\overline{2\mu+1}.\pi}{n}$; & $\text{Sin.}\,V = \text{Sin.}\,\frac{\overline{2\mu+1}.\pi}{n}$; de forte que le facteur $b\,b - 2\,m\,b.\,\text{Cos.}\,V + m\,m = o = b\,b - 2\,c\,b.\,\text{Cos.}\,\frac{\overline{2\mu+1}.\pi}{n} + c\,c$ donnera la valeur generale $y = \alpha\, e^{m\,x\,\text{Cos.}\,V}\,\text{Sin.}\,A'(m\,x\,\text{Sin.}\,V + B') =$
$\alpha\, e^{c\,x\,\text{Cos.}\,\frac{\overline{2\mu+1}.\pi}{n}}\,\text{Sin.}\,A'\left(c\,x\,\text{Sin.}\,\frac{\overline{2\mu+1}.\pi}{n} + B'\right)$; & la valeur particuliere $y = \alpha\, e^{-c\,x}$, qui repond au facteur $b + c = o$, lorfque n eft un nombre impair fera auffi contenue dans cette valeur generale $y = \alpha\, e^{c\,x\,\text{Cos.}\,\frac{\overline{2\mu+1}.\pi}{n}} \times \text{Sin.}\,A'\left(c\,x\,\text{Sin.}\,\frac{\overline{2\mu+1}.\pi}{n} + B'\right)$ en fubftituant $2\,\mu + 1$ pour n; car alors on a $\text{Cos.}\,\frac{\overline{2\mu+1}.\pi}{n} = \text{Cos.}\,\pi = -1$, & $\text{Sin.}\,\frac{\overline{2\mu+1}.\pi}{n} = \text{Sin.}\,\pi = o$, ce qui rend $y = \alpha\, e^{-c\,x} \times \text{Sin.}\,A'(B')$, ou $y = \alpha\, e^{-c\,x}$, en mettant une feule conftante arbitraire α, pour le produit $\alpha\,\text{Sin.}\,A'(B')$.

On trouvera donc toutes les valeurs particulieres de y, fi dans la valeur generale $y = \alpha\, e^{c\,x\,\text{Cos.}\,\frac{\overline{2\mu+1}.\pi}{n}} \times \text{Sin.}\,A'\left(c\,x\,\text{Sin.}\,\frac{\overline{2\mu+1}.\pi}{n} + B'\right)$ on fubftitue fucceffivement

tous les nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. qui ne font pas plus grands que l'expoſant n (Art. CLXI.) & la ſomme de toutes ces valeurs particulieres de y donnera l'intégrale complette cherchée

$$y = e^{cx \,\text{Cos.}\frac{\pi}{n}} \text{Sin.}\, A'\left(cx\,\text{Sin.}\frac{\pi}{n} + B'\right) + \beta e^{cx\,\text{Cos.}\frac{3\pi}{n}} \times$$

$$\text{Sin.}\, A'\left(cx\,\text{Sin.}\frac{3\pi}{n} + C'\right) + \gamma e^{cx\,\text{Cos.}\frac{5\pi}{n}} \text{Sin.}\, A'\left(cx\,\text{Sin.}\frac{5\pi}{n} + D'\right) + \&c.$$

en continuant cette ſuite juſqu'a ce qu'elle contienne le nombre n de conſtantes arbitraires, ce qui arrivera, ſi on ſubſtitue ſucceſſivement toutes les fractions $\frac{1}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\frac{5}{n}$, $\frac{7}{n}$, &c. qui ne ſurpaſſent point l'unité. Lorſque n ſera un nombre pair, le dernier terme de la ſuite ſera $\nu e^{cx.\,\text{Cos.}\frac{\overline{n-1}.\pi}{n}} \text{Sin.}\, A'\left(cx.\times \text{Sin.}\frac{\overline{n-1}.\pi}{n} + N'\right)$. Mais, ſi n eſt un nombre impair, le dernier terme ſera νe^{-cx}, & le penultieme $\rho e^{cx.\,\text{Cos.}\frac{\overline{n-2}.\pi}{n}} \text{Sin.}\, A'\left(cx\,\text{Sin.}\frac{\overline{n-2}.\pi}{n} + M'\right)$. On aura donc dans tous les cas l'intégrale complette de la différentielle propoſée. *C. Q. F. T.*

EXEMPLE. On propoſe de trouver l'intégrale complette de cette equation différentielle du ſeptieme ordre $o = y + \frac{d^7y}{dx^7}$.

En

En la comparant avec l'equation différentielle $o = c^n y + \frac{d^n y}{dx^n}$, on trouve $c = 1$, & $n = 7$; donc, en substituant ces valeurs dans la formule generale, on aura pour l'intégrale complette de la proposée $y = \alpha e^{x . \text{Cos.} \frac{\pi}{7}} \text{Sin.} A' (x \, \text{Sin.} \frac{\pi}{7} + B') + \beta e^{x \, \text{Cos.} \frac{3\pi}{7}} \text{Sin.} A' \times (x \, \text{Sin.} \frac{3\pi}{7} + C') + \gamma e^{x \, \text{Cos.} \frac{5\pi}{7}} \text{Sin.} A' (x \, \text{Sin.} \frac{5\pi}{7} + D') + \delta e^{-x}$.

DXII.

PROBLEME IV. Trouver l'intégrale complette de l'equation différentielle $\frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} \pm \frac{2 a c^n d^n y}{dx^n} - c^{2n} y = o$.

SOLUTION. Cette différentielle se reduit par substitutions a l'equation algebrique $b^{2n} \pm 2 a c^n b^n - c^{2n} = o$, qui est le produit des deux facteurs réels $b^n \pm a c^n - c^n \sqrt{aa + 1} = o$, & $b^n \pm a c^n + c^n \sqrt{aa + 1} = o$. Or puisque $\sqrt{aa + 1} > a$, il est evident que $\pm a c^n - c^n \sqrt{aa + 1}$ est une quantité negative, qu'on peut supposer $= - p^n$, & qu'au contraire $\pm a c^n + c^n \times \sqrt{aa + 1}$ est une quantité positive, qu'on peut sup-

poser $= + q^n$. Donc les deux facteurs seront $b^n - p^n = o$, & $b^n + q^n = o$. On trouve par le Probleme II. que la valeur generale de y, qui repond au facteur $b^n - p^n = o$, est $y = \alpha e^{px} + \beta e^{px \text{ Cos. } \frac{2\pi}{n}} \text{ Sin. } A'(px \times \text{ Sin. } \frac{2\pi}{n} + B') + \gamma e^{px \text{ Cos. } \frac{4\pi}{n}} \text{ Sin. } A'(px \text{ Sin. } \frac{4\pi}{n} + C') + \&c.$, & par le Probl. III. la valeur generale de y qui repond a l'autre facteur $b^n + q^n = o$, est $y = \alpha' e^{qx \text{ Cos. } \frac{\pi}{n}} \text{ Sin. } A'(qx \text{ Sin. } \frac{\pi}{n} + B'') + \beta' e^{qx \text{ Cos. } \frac{3\pi}{n}} \times \text{ Sin. } A'(qx \text{ Sin. } \frac{3\pi}{n} + C'') + \gamma' e^{qx \text{ Cos. } \frac{5\pi}{n}} \text{ Sin. } A'(qx \times \text{ Sin. } \frac{5\pi}{n} + D'') + \&c.$, en substituant q au lieu de p dans la formule generale du dit Probleme, & en ecrivant α' au lieu de α, β' au lieu de β, B'' au lieu de B', C'' au lieu de C', &c. pour eviter la confusion.

La somme de ces deux valeurs de y donnera, pour l'intégrale complette de la différentielle proposée, l'equation suivante

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \alpha e^{px} + \beta e^{px \text{Cos.} \frac{2\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(px \text{Sin.} \frac{2\pi}{n} + B'\right) + \\ \gamma e^{px \text{Cos.} \frac{4\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(px \text{Sin.} \frac{4\pi}{n} + C'\right) + \\ \delta e^{px \text{Cos.} \frac{6\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(px \text{Sin.} \frac{6\pi}{n} + D'\right) + \&c. \\ + \alpha' e^{qx \text{Cos.} \frac{\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(qx \text{Sin.} \frac{\pi}{n} + B''\right) + \\ \beta' e^{qx \text{Cos.} \frac{3\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(qx \text{Sin.} \frac{3\pi}{n} + C''\right) + \\ \gamma' e^{qx \text{Cos.} \frac{5\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(qx \text{Sin.} \frac{5\pi}{n} + D''\right) + \&c. \end{array} \right.$$

C. Q. F. T.

DXIII.

LEMME I. Supposé que π soit la demie circonférence d'un cercle, dont le rayon est 1, & τ un arc de cercle, dont le Cosinus soit $a < 1$, on trouvera tous les facteurs réels de deux dimensions du trinome general $b^{2n} + 2ac^n b^n$ (ou $2c^n b^n \text{Cos.} \tau$) $+ c^{2n} = 0$, en substituant successivement dans la formule $bb - 2cb \text{Cos.} \times \left(\frac{\mu\pi - \tau}{n}\right) + cc = 0$ tous les nombres impairs 1, 3, 5, 7 ..... $2n - 1$, au lieu de μ.

On demontre cette propoſition par la methode que nous avons donnée Art. CLVII. Car ſoit $bb - 2cb \text{Cos.} M + cc = o$. Le facteur réel indeterminé du trinome general propoſé, une des deux racines de ce facteur ſera $b = c \text{Cos.} M + c \sqrt{\overline{\text{Cos.} M}^2 - 1} = c \text{Cos.} M + c \text{Sin.} M \times \sqrt{-1}$, a cauſe de l'egalité $\overline{\text{Cos.} M}^2 + \overline{\text{Sin.} M}^2 = 1$. On aura donc (Art. CLVII.) $b^n = c^n \text{Cos.} nM + c^n \text{Sin.} nM \times \sqrt{-1}$, & $b^{2n} = c^{2n} \text{Cos.} 2nM + c^{2n} \text{Sin.} 2nM . \sqrt{-1}$. Si on ſubſtitue ces valeurs de b^{2n}, & de b^n dans le trinome general $b^{2n} + 2c^n b^n \text{Cos.} \tau + c^{2n} = o$, il deviendra $c^{2n} \text{Cos.} 2nM + c^{2n} \text{Sin.} 2nM . \sqrt{-1} + 2c^{2n} \times \text{Cos.} nM \text{Cos.} \tau + 2c^{2n} \text{Sin.} nM \text{Cos.} \tau . \sqrt{-1} + c^{2n} = o$, d'où l'on tirera ſuivant la methode de l'Art. CLVII. les deux equations ſuivantes

I. $c^{2n} \text{Cos.} 2nM + 2c^{2n} \text{Cos.} nM . \text{Cos.} \tau + c^{2n} = o$;

ou, en diviſant par c^{2n}, $\text{Cos.} 2nM + 2 \text{Cos.} nM . \text{Cos.} \tau + 1 = o$.

II. $c^{2n} \text{Sin.} 2nM . \sqrt{-1} + 2c^{2n} \text{Sin.} nM . \text{Cos.} \tau . \times \sqrt{-1} = o$, ou, en diviſant par $c^{2n} \sqrt{-1}$, $\text{Sin.} 2nM + 2 \text{Sin.} nM . \text{Cos.} \tau = o$.

Or on a toujours (Art. LXXIII.) $\text{Cos.}\,2\,n\,M = 2\,\overline{\text{Cos.}\,n\,M}^2 - 1$, & $\text{Sin.}\,2\,n\,M = 2\,\text{Sin.}\,n\,M.\,\text{Cos.}\,n\,M$. Donc, en ſubſtituant $2\,\overline{\text{Cos.}\,n\,M}^2 - 1$ au lieu de $\text{Cos.}\,2\,n\,M$ dans la premiere equation, & $2\,\text{Sin.}\,n\,M.\,\text{Cos.}\,n\,M$ au lieu de $\text{Sin.}\,2\,n\,M$ dans la ſeconde, on aura par la premiere equation, $2\,\overline{\text{Cos.}\,n\,M}^2 + 2\,\text{Cos.}\,n\,M.\,\text{Cos.}\,\tau = o$, &, en diviſant par $2\,\text{Cos.}\,n\,M$, $\text{Cos.}\,n\,M + \text{Cos.}\,\tau = o$; & on trouvera par la ſeconde equation $2\,\text{Sin.}\,n\,M. \times \text{Cos.}\,n\,M + 2\,\text{Sin.}\,n\,M.\,\text{Cos.}\,\tau = o$, &, en diviſant par $2\,\text{Sin.}\,n\,M$, on aura encore $\text{Cos.}\,n\,M + \text{Cos.}\,\tau = o$; on aura donc par ces deux equations $\text{Cos.}\,n\,M = -\text{Cos.}\,\tau$.

Mais, $\text{Cos.}\,\tau$ etant poſitif, on a $-\text{Cos.}\,\tau = \text{Cos.}(\pi - \tau) = \text{Cos.}(3\,\pi - \tau) = \text{Cos.}(5\,\pi - \tau) =$ &c., & generalement $-\text{Cos.}\,\tau = \text{Cos.}(\mu\,\pi - \tau)$, μ etant un nombre impair quelconque. Donc dans cette ſuppoſition on aura $\text{Cos.}\,n\,M = \text{Cos.}(\mu\,\pi - \tau)$, par conſequent l'arc $n\,M = \mu\,\pi - \tau$, & $M = \frac{\mu\,\pi - \tau}{n}$. Subſtituant cette valeur de M dans le facteur indeterminé $b\,b - 2\,c\,b\,\text{Cos.}\,M + c\,c = o$, il devient $b\,b - 2\,c\,b.\,\text{Cos.}\left(\frac{\mu\,\pi - \tau}{n}\right) + c\,c = o$, formule qui donnera tous les facteurs réels de deux dimenſions du trinome general propoſé, en ſubſtituant ſucceſſivement au lieu de μ tous les nombres impairs juſqu'a $2\,n - 1$ incluſivement; car il en eſt inutile d'en ſubſtituer de plus grands, par ce qu'ils donne-

roient les mêmes quantités qu'on auroit deja trouvées par les mêmes ſubſtitutions. *C. Q. F. D.*

DXIV.

LEMME II. Dans la ſuppoſition du Lemme precedent, on trouve tous les facteurs réels de deux dimenſions du trinome general $b^{2n} - 2ac^n b^n$ (ou $- 2c^n b^n \text{Cos.}\,\tau$) $+ c^{2n} = o$, en ſubſtituant ſucceſſivement dans la formule $bb - 2cb\,\text{Cos.}\left(\frac{\mu\tau - \tau}{n}\right) + cc = o$, tous les nombres pairs 2, 4, 6, 8....... $2n$ au lieu de μ.

On demontre cette propoſition comme la precedente. Car, en ſuppoſant que $bb - 2cb\,\text{Cos.}\,M + cc = o$ ſoit le facteur double indeterminé du trinome general propoſé, on aura $b = c\,\text{Cos.}\,M + c\,\text{Sin.}\,M.\sqrt{-1}$, & ayant ſubſtitué cette valeur de b, ou ſes puiſſances au lieu de b^{2n}, & de b^n dans le trinome general propoſé, il deviendra $c^{2n}\,\text{Cos.}\,2nM + c^{2n}\,\text{Sin.}\,2nM.\sqrt{-1} - 2c^{2n}\,\text{Cos.}\,nM.\,\text{Cos.}\,\tau - 2c^{2n}\,\text{Sin.}\,nM.\,\text{Cos.}\,\tau.\sqrt{-1} + c^{2n} = o$, d'où l'on tirera, comme dans la demonſtration precedente, $\text{Cos.}\,nM - \text{Cos.}\,\tau = o$, & $\text{Cos.}\,nM = \text{Cos.}\,\tau$. Mais, $\text{Cos.}\,\tau$ etant poſitif, on a toujours

$\text{Cos.}\,\tau = \text{Cos.}(2\pi - \tau) = \text{Cos.}(2\pi + \tau) = \text{Cos.}(4\pi - \tau) = \text{Cos.}(4\pi + \tau) = \text{Cos.}(\mu\pi \pm \tau)$, μ etant un nombre pair quelconque. On aura donc $\text{Cos.}\,n M = \text{Cos.} \times (\mu\pi - \tau)$, $n M = \mu\pi - \tau$, & $M = \frac{\mu\pi - \tau}{n}$; par conséquent la formule des facteurs doubles deviendra $bb - 2cb\,\text{Cos.}\left(\frac{\mu\pi - \tau}{n}\right) + cc = o$; & on trouvera ces facteurs réels en substituant successivement dans cette formule tous les nombres pairs, jusqu'a $2n$ inclusivement, au lieu de μ; car il seroit inutile d'en substituer de plus grands. *C. Q. F. D.*

DXV.

PROBLEME V. Trouver l'intégrale complette de l'equation différentielle $\frac{d^{2n}y}{2n} + \frac{2ac^n d^n y}{dx^n} + c^{2n}y = o$.

SOLUTION. On reduit cette différentielle a l'equation algebrique $b^{2n} + 2ac^n b^n + c^{2n} = o$, qui est le produit des deux facteurs $b^n + ac^n + c^n\sqrt{aa - 1} = o$, & $b^n + ac^n - c^n\sqrt{aa - 1}$, dans lesquels $a > 1$, ou $a = 1$, ou $a < 1$, ce qui donne trois Cas.

CAS I. Lorſque $a > 1$, $\sqrt{aa-1}$ ſera un nombre poſitif moindre que a; par conſequent $+ac^n \pm c^n\sqrt{aa-1}$ ſera auſſi une quantité poſitive, & les deux facteurs pourront s'exprimer par $b^n + p^n = 0$, & $b^n + q^n = 0$, en faiſant $ac^n + c^n\sqrt{aa-1} = +p^n$, & $ac^n - c^n\sqrt{aa-1} = +q^n$; la ſomme des deux valeurs generales de y, qui repondent a ces deux facteurs, & qu'on trouve par le Probleme III. donnera pour l'intégrale complette de la différentielle propoſée l'equation ſuivante

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \alpha e^{px \,\text{Cos.}\, \frac{\pi}{n}} \,\text{Sin.}\, A'\left(px \,\text{Sin.}\, \frac{\pi}{n} + B'\right) + \\ \quad \beta e^{px \,\text{Cos.}\, \frac{3\pi}{n}} \,\text{Sin.}\, A'\left(px \,\text{Sin.}\, \frac{3\pi}{n} + C'\right) + \\ \quad \gamma e^{px \,\text{Cos.}\, \frac{5\pi}{n}} \,\text{Sin.}\, A'\left(px \,\text{Sin.}\, \frac{5\pi}{n} + D'\right) + \&c. \\ + \alpha' e^{qx \,\text{Cos.}\, \frac{\pi}{n}} \,\text{Sin.}\, A'\left(qx \,\text{Sin.}\, \frac{\pi}{n} + B''\right) + \\ \quad \beta' e^{qx \,\text{Cos.}\, \frac{3\pi}{n}} \,\text{Sin.}\, A'\left(qx \,\text{Sin.}\, \frac{3\pi}{n} + C''\right) + \\ \quad \gamma e^{qx \,\text{Cos.}\, \frac{5\pi}{n}} \,\text{Sin.}\, A'\left(qx \,\text{Sin.}\, \frac{5\pi}{n} + D''\right) + \&c. \end{array} \right.$$

CAS

CAS II. Lorsque $a = 1$, l'equation différentielle proposée devient $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + \frac{2c^n d^n y}{dx^n} + c^{2n}y = 0$, & son equation algebrique est le quarré $b^{2n} + 2c^n b^n + c^{2n} = (b^n + c^n)^2 = 0$, dont les facteurs seront aussi quarrés; or les facteurs réels de deux dimensions du binome $b^n + c^n = 0$ sont contenus dans la formule $\left\{bb - 2cb\,\text{Cos.}\left(\frac{2\mu+1}{n}\right)\pi + cc\right\}^2 = 0$, & par le Probl. I. La valeur generale de y, qui repond a ce quarré, est

$$y = \alpha e^{cx\,\text{Cos.}\frac{(2\mu+1)\pi}{n}}\,\text{Sin.}\,A'\left(cx\,\text{Sin.}\frac{(2\mu+1)\pi}{n} + B'\right)$$
$$+ \beta x e^{cx\,\text{Cos.}\frac{(2\mu+1)\pi}{n}}\,\text{Sin.}\,A'\left(cx\,\text{Sin.}\frac{(2\mu+1)\pi}{n} + C'\right).$$

Donc, en substituant successivement dans cette valeur generale de y au lieu de $2\mu + 1$ les nombres impairs $1, 3, 5, 7, 9,$ &c., qui ne sont pas plus grands que n, comme dans le Probleme III., on aura pour l'intégrale complette de la différentielle proposée l'equation suivante

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \alpha e^{cx \text{Cos.} \frac{\tau}{n}} \text{Sin.} A'\left(cx \text{Sin.} \frac{\tau}{n} + B'\right) + \\ \beta e^{cx \text{Cos.} \frac{3\tau}{n}} \text{Sin.} A'\left(cx \text{Sin.} \frac{3\tau}{n} + C'\right) + \\ \gamma e^{cx \text{Cos.} \frac{5\tau}{n}} \text{Sin.} A'\left(cx \text{Sin.} \frac{5\tau}{n} + D'\right) + \&c. \\ + \alpha' x e^{cx \text{Cos.} \frac{\tau}{n}} \text{Sin.} A'\left(cx \text{Sin.} \frac{\tau}{n} + B''\right) + \\ \beta' x e^{cx \text{Cos.} \frac{3\tau}{n}} \text{Sin.} A'\left(cx \text{Sin.} \frac{3\tau}{n} + C''\right) + \\ \gamma' x e^{cx \text{Cos.} \frac{5\tau}{n}} \text{Sin.} A'\left(cx \text{Sin.} \frac{5\tau}{n} + D''\right) + \&c. \end{array} \right.$$

CAS III. Lorſque $a < 1$, les deux facteurs $b^n + ac^n \pm c^n \sqrt{aa - 1} = o$ ſont imaginaires. Mais, en prenant l'arc τ dans un cercle, dont le rayon eſt 1, de ſorte que $\text{Cos.}\,\tau = a$, on trouvera (Lemme I.) tous les facteurs réels de deux dimenſions de l'equation algebrique $b^{2n} + 2ac^n b^n$ (ou $+ 2c^n b^n \text{Cos.}\,\tau$) $+ c^{2n} = o$, en ſubſtituant ſucceſſivement dans la formule $bb - 2cb\,\text{Cos.}\frac{\mu\tau - \tau}{n} + cc = o$ tous les nombres impairs $1, 3, 5, 7, \ldots\ldots 2n - 1$. au lieu de μ. Or la valeur generale de y, qui repond a cette formule, eſt

(Prob. I.) $y = \alpha e^{cx \,\text{Cos.}\, \frac{\mu\pi - \tau}{n}} \,\text{Sin.}\, A'\left(cx \,\text{Sin.}\, \frac{\mu\pi - \tau}{n} + B'\right)$.
Donc, en ſubſtituant ſucceſſivement dans cette valeur generale de y tous les nombres impairs $1, 3, 5, 7, \ldots\ldots$ $2n - 1$ au lieu de μ, on aura, pour l'intégrale complette de la différentielle propoſée, l'equation ſuivante

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \alpha e^{cx \,\text{Cos.}\, \frac{\pi - \tau}{n}} \,\text{Sin.}\, A'\left(cx \,\text{Sin.}\, \frac{\pi - \tau}{n} + B'\right) + \\ \quad \beta e^{cx \,\text{Cos.}\, \frac{3\pi - \tau}{n}} \,\text{Sin.}\, A'\left(cx \,\text{Sin.}\, \frac{3\pi - \tau}{n} + C'\right) + \\ \quad \gamma e^{cx \,\text{Cos.}\, \frac{5\pi - \tau}{n}} \,\text{Sin.}\, A'\left(cx \,\text{Sin.}\, \frac{5\pi - \tau}{n} + D'\right) + \\ \quad \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \nu e^{cx \,\text{Cos.}\, \frac{(2n-1)\pi - \tau}{n}} \times \\ \quad \text{Sin.}\, A'\left(cx \,\text{Sin.}\, \frac{(2n-1)\pi - \tau}{n} + M'\right). \end{array} \right.$$

C. Q. F. T.

DXVI.

PROBLEME VI. Trouver l'intégrale complette de l'equation différentielle $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} - \frac{2ac^n d^n y}{dx^n} + c^{2n} y = 0$.

SOLUTION. On resout ce Probleme comme le precedent, car l'equation algebrique, qu'on tire par substitutions de la différentielle proposée, est $b^{2n} - 2ac^n b^n + c^{2n} = o$, qui est le produit des deux facteurs $b^n - ac^n - c^n \sqrt{aa-1} = o$, & $b^n - ac^n + c^n \sqrt{aa-1} = o$, dans lesquels a est > 1, ou $= 1$, ou < 1, ce qui donne trois Cas.

CAS I. Lorsque $a > 1$, les deux facteurs sont réels, & peuvent s'exprimer par $b^n - p^n = o$, & $b^n - q^n = o$, en faisant $ac^n + c^n \sqrt{aa-1} = p^n$, & $ac^n - c^n \sqrt{aa-1} = q^n$. La somme des deux valeurs generales de y, qui repondent a ces deux facteurs, & qu'on trouve par le Probleme II. donnera, pour l'intégrale complette de la différentielle proposée, l'equation suivante

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \alpha c^{px} + \beta c^{px \text{Cos.} \frac{2\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(px \text{Sin.} \frac{2\pi}{n} + B' \right) + \\ \gamma c^{px \text{Cos.} \frac{4\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(px \text{Sin.} \frac{4\pi}{n} + C' \right) + \\ \delta c^{px \text{Cos.} \frac{6\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(px \text{Sin.} \frac{6\pi}{n} + D' \right) + \&c. \\ + \alpha' c^{qx} + \beta' c^{qx \text{Cos.} \frac{2\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(qx \text{Sin.} \frac{2\pi}{n} + B'' \right) \\ + \gamma' c^{qx \text{Cos.} \frac{4\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(qx \text{Sin.} \frac{4\pi}{n} + C'' \right) + \\ \delta' c^{qx \text{Cos.} \frac{6\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(qx \text{Sin.} \frac{6\pi}{n} + D'' \right) + \&c. \end{array} \right.$$

CAS II. Lorſque $a = 1$, l'equation différentielle propoſée devient $\frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} - \frac{2c^n d^n y}{dx^n} + c^{2n} y = 0$, & ſon equation algebrique eſt le quarré $b^{2n} - 2c^n b^n + c^{2n} = (b^n - c^n)^2 = 0$, dont les facteurs feront auſſi quarrés. Or les facteurs réels de deux dimenſions du binome $b^n - c^n = 0$ ſont contenus dans la formule $bb - 2cb \text{Cos.} \times \frac{2\mu\pi}{n} + cc = 0$, par conſequent les quarrés de ces facteurs feront contenus dans le quarré $(bb - 2cb \text{Cos.} \frac{2\mu\pi}{n} +$

$cc)^2 = o$, &, par le Probleme I., la valeur generale de y, qui repond a ce quarré est $y = \alpha e^{cx \text{Cos.} \frac{2\mu\pi}{n}} \text{Sin.} A' \times (cx \text{Sin.} \frac{2\mu\pi}{n} + B') + \beta x e^{cx \text{Cos.} \frac{2\mu\pi}{n}} \text{Sin.} A' (cx \text{Sin.} \frac{2\mu\pi}{n} + C')$. Donc, en substituant successivement dans cette valeur generale de y au lieu de 2μ les nombres 0, 2, 4, 6, 8, &c. pas plus grands que n, comme dans le Probleme II, on aura pour l'intégrale complette l'equation suivante

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \alpha e^{cx} + \beta e^{cx \text{Cos.} \frac{2\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(cx \text{Sin.} \frac{2\pi}{n} + B' \right) + \\ \quad \gamma e^{cx \text{Cos.} \frac{4\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(cx \text{Sin.} \frac{4\pi}{n} + C' \right) + \\ \quad \delta e^{cx \text{Cos.} \frac{6\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(cx \text{Sin.} \frac{6\pi}{n} + D' \right) + \&c. \\ + \alpha' x e^{cx} + \beta' x e^{cx \text{Cos.} \frac{2\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(cx \text{Sin.} \frac{2\pi}{n} + B'' \right) \\ \quad + \gamma' x e^{cx \text{Cos.} \frac{4\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(cx \text{Sin.} \frac{4\pi}{n} + C'' \right) + \\ \quad \delta' x e^{cx \text{Cos.} \frac{6\pi}{n}} \text{Sin.} A' \left(cx \text{Sin.} \frac{6\pi}{n} + D'' \right) + \&c. \end{array} \right.$$

CAS III. Lorſque $a < 1$, les deux facteurs $b^n - ac^n \pm c^n \sqrt{aa-1}$ feront imaginaires; mais en prenant l'arc τ dans le cercle, dont le rayon eſt 1, de forte que $\text{Cos.}\,\tau = a$, on trouvera (Lem. II.) tous les facteurs réels de deux dimenſions de l'equation algebrique $b^{2n} - 2ac^n b^n$ (ou, $-2c^n b^n \text{Cos.}\,\tau$) $+ c^{2n} = 0$, en ſubſtituant ſucceſſivement dans la formule $bb - 2cb \times \text{Cos.}\,\frac{\mu\tau - \tau}{n} + cc = 0$ tous les nombres pairs $2, 4, 6, 8, \ldots\ldots 2n$ au lieu de μ. Or la valeur generale de y, qui repond a cette formule eſt (Probleme I.) $y = \alpha\, e^{cx \text{Cos.} \frac{\mu\tau - \tau}{n}} \text{Sin.}\, A' \left\{ cx \,\text{Sin.} \left(\frac{\mu\tau - \tau}{n}\right) + B' \right\}$. Donc, en ſubſtituant ſucceſſivement dans cette valeur generale de y tous les nombres pairs juſqu'a $2n$ incluſivement au lieu de μ, on aura pour l'intégrale complette de la différentielle propoſée, l'equation ſuivante

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \alpha e^{cx \,\text{Cos.}\, \frac{2\pi - \tau}{n}} \,\text{Sin.}\, A' \left(cx \,\text{Sin.}\, \frac{2\pi - \tau}{n} + B' \right) + \\ \beta e^{cx \,\text{Cos.}\, \frac{4\pi - \tau}{n}} \,\text{Sin.}\, A' \left(cx \,\text{Sin.}\, \frac{4\pi - \tau}{n} + C' \right) + \\ \gamma e^{cx \,\text{Cos.}\, \frac{6\pi - \tau}{n}} \,\text{Sin.}\, A' \left(cx \,\text{Sin.}\, \frac{6\pi - \tau}{n} + D' \right) + \\ \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \nu e^{cx \,\text{Cos.}\, \frac{2n\pi - \tau}{n}} \times \\ \text{Sin.}\, A' \left(cx \,\text{Sin.}\, \frac{2n\pi - \tau}{n} + M' \right). \end{array} \right.$$

DXVII.

REMARQUE. Nous avons traité dans ce Chapitre l'intégrale de l'equation $o = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} + \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{N\,d^ny}{dx^n}$, dans la ſuppoſition des coefficiens A, B, C, D, &c. conſtants. Nous avons de plus obſervé qu'il n'y a point de methode generale pour trouver le nombre ſuffiſant d'equations particulieres entre y & x, lorſque les coëfficients de la propoſée renferment des fonctions de x; mais quoiqu'on n'ait pas cette methode pour l'equation generale precedente, il y a cependant des methodes d'une aſſez grande etendue dans des cas particuliers. C'eſt ce que nous allons expliquer dans le Chapitre ſuivant.

CHA-

CHAPITRE VIII.

De quelques Methodes particulieres pour trouver les intégrales complettes des equations différentielles du second ordre $o = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}$, *&* $o = D + Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}$, *dans lesquelles* dx *est constante, &* A, B, C, D *sont des fonctions de* x.

DXVIII.

PROBLEME I. L'equation $y = X$ fonction connue de x etant une intégrale particuliere de l'equation différentielle $o = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}$, trouver l'intégrale complette de cette equation.

SOLUTION. En divisant l'equation proposée par C, & supposant $\frac{A}{C} = P$, $\frac{B}{C} = Q$, cette equation deviendra $Py + \frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = o$, dans laquelle P & Q seront encore des fonctions de x. Or, puisque $y = X$, on aura, en différentiant, $dy = dX$, $ddy = ddX$;

&, ſubſtituant ces valeurs pour y, dy, ddy dans l'equation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = o$, elle deviendra $PX + \frac{QdX}{dx} + \frac{ddX}{dx^2} = o$. Suppoſons maintenant que l'equation $y = Xz$ ſoit une autre intégrale particuliere de l'equation différentielle propoſée, on aura, en différentiant, $dy = zdX + Xdz$, $ddy = zddX + 2dzdX + Xddz$, &, ſubſtituant ces valeurs pour y, dy, ddy dans l'equation différentielle $Py + \frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = o$, elle deviendra $PXz + \frac{QzdX}{dx} + \frac{QXdz}{dx} + \frac{zddX}{dx^2} + \frac{2dzdX}{dx^2} + \frac{Xddz}{dx^2} = o$, equation que nous deſignerons par (M). Mais, par ce qu'on vient de trouver $PX + \frac{QdX}{dx} + \frac{ddX}{dx^2} = o$, on aura auſſi $PXz + \frac{QzdX}{dx} + \frac{zddX}{dx^2} = o$, & retranchant cette quantité de l'equation (M), il reſtera $\frac{QXdz}{dx} + \frac{2dXdz}{dx^2} + \frac{Xddz}{dx^2} = o$, & multipliant le tout par $\frac{dx^2}{Xdz}$, on aura $Qdx + \frac{2dX}{X} + \frac{ddz}{dz} = o$. L'intégrale de cette quantité différentielle eſt $S.Qdx + 2L.X + L.dz = S.QdxL.e + L.n^2 +$

$L.dz = L.e^{S.Qdx}X^2dz$, en ſuppoſant $L.e = 1$. Il faut egaler cette intégrale a une conſtante arbitraire du même ordre $L.\beta dx$, pour avoir l'equation $L.(e^{S.Qdx} \times X^2 dz) = L.\beta dx$, ou $e^{S.Qdx}X^2dz = \beta dx$, qui ſera l'intégrale complette de l'equation différentielle $Qdx + \frac{2dX}{X} + \frac{ddz}{dz} = o$. On aura donc $dz = \frac{\beta e^{-S.Qdx}dx}{X^2}$, &, en intégrant, $z = \beta . S. \frac{e^{-S.Qdx}dx}{X^2}$. Par conſequent l'equation $y = Xz = \beta X.S.\frac{e^{-S.Qdx}dx}{X^2}$ ſera une autre intégrale particuliere de l'equation différentielle propoſée, &, en ſuppoſant que α ſoit une conſtante arbitraire, on aura $y = \alpha X + \beta X.S.\frac{e^{-S.Qdx}dx}{X^2}$ pour l'intégrale complette de la propoſée. *C. Q. F. T.*

DXIX.

Corollaire I. Si dans l'equation différentielle propoſée $Py + \frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = o$ le coefficient P eſt egal a la quantité $\frac{-QX' - X''}{X}$, dans laquelle $X' = \frac{dX}{dx}$, & $X'' = \frac{dX'}{dx}$; l'equation $y = X$ fonction de x ſera un intégrale

particuliere de la propoſée, & ſon intégrale complette ſera l'equation $y = \alpha X + \beta X . S . \frac{e^{-S . Q d x} d x}{X^2}$, quelque ſoit Q. Car ſi on ſuppoſe $P = \frac{-Q X' - X''}{X}$, l'equation différentielle propoſée ſera $(N) - y . \frac{Q X' + X''}{X} + \frac{Q d y}{d x} + \frac{d d y}{d x^2} = o$. Or en faiſant $y = X$, on aura $d y = d X$, $\frac{d y}{d x} = \frac{d X}{d x} = X'$, $\frac{d d y}{d x} = d X'$, $\frac{d d y}{d x^2} = \frac{d X'}{d x} = X''$, & ſubſtituant X pour y, X' pour $\frac{d y}{d x}$, & X'' pour $\frac{d d y}{d x^2}$ dans l'equation différentielle (N), elle deviendra $- X . \times \frac{Q X' + X''}{X} + Q X' + X'' = o$, equation identique. Donc l'equation $y = X$ ſera une intégrale particuliere de l'equation différentielle (N), & par conſequent l'equation $y = \alpha X + \beta X . S . \frac{e^{-S . Q d x} d x}{X^2}$ en ſera l'intégrale complette.

DXX.

COROLLAIRE II. Si on prend pour X & pour Q deux fonctions quelconques de x, & qu'on les ſubſtitue pour X & pour Q dans la formule, $- y . \frac{Q X' + X''}{X} +$

$\frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = o$, & dans son intégrale $y = \alpha X + \beta X . S . \frac{e^{-S . Q dx} dx}{X^2}$, on aura une equation différentielle du second ordre de la forme proposée dans le Probleme I. avec son intégrale complette, & on pourra trouver de cette maniere une infinité d'equations différentielles de cette forme avec leurs intégrales complettes.

DXXI.

EXEMPLE I. En prenant $X = x^m$, on aura $dX = mx^{m-1}dx$, $\frac{dX}{dx} = X' = mx^{m-1}$, $\frac{dX'}{dx} = m . \overline{m-1} . x^{m-2} = X''$, & substituant ces valeurs pour X, X', X'' dans l'equation différentielle (N), elle deviendra $-y\left(\frac{mQx^{m-1} + m . \overline{m-1} . x^{m-2}}{x^m}\right) + \frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = o$, ou $-my . \frac{Qx + m - 1}{x^2} + \frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = o$, & son intégrale complette sera $y = \alpha x^m + \beta x^m . S . \frac{e^{-S . Q dx} dx}{x^{2m}}$, quelque soit Q. Si donc l'on prend $Q = ax^n$, l'equation différentielle sera $-my(ax^{n-1} + \overline{m-1} . x^{-2}) + \frac{ax^n dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = o$, & son intégrale complette $y = \alpha x^m + \beta x^m . \times$

$S.\frac{c^{-\frac{ax^{n+1}}{n+1}}dx}{x^{2m}}$, a cause de $S.Qdx = S.ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$.

DXXII.

EXEMPLE II. En prenant $X = ax^m + bx^n + cx^p +$ &c., on aura $X' = max^{m-1} + nbx^{n-1} + pcx^{p-1} +$ &c, $X'' = m.\overline{m-1}.ax^{m-2} + n.\overline{n-1}.bx^{n-2} + p.\overline{p-1}\times cx^{p-2} +$ &c., & substituant ces valeurs dans l'equation différentielle $-y.\frac{QX'+X''}{X} + \frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$, elle deviendra $-y\{Q(max^{m-1} + nbx^{n-1} + pcx^{p-1} +$ &c. $) + m.\overline{m-1}.ax^{m-2} + n.\overline{n-1}\,bx^{n-2} + p.\overline{p-1}.cx^{p-2} +$ &c.$\} + \frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$, & son intégrale complette sera $y = \alpha(ax^m + bx^n + cx^p +$ &c.$) + \beta(ax^m + bx^n + cx^p +$ &c.$)\,S.\frac{c^{-S\,Qdx}dx}{(ax^m + bx^n + cx^p + \&c.)^2}$.

DXXIII.

COROLLAIRE III. Lorsqu'on voudra intégrer une equation différentielle du second ordre de la forme pro-

posée dans le Probleme I., si on peut la reduire a une des formules différentielles trouvées par le Corollaire II., on aura tout d'un coup son intégrale complette. Supposé, par exemple, qu'on se propose d'intégrer l'equation différentielle du second ordre $ddy + ax^2dydx - ayxdx^2 = o$, ou $-ayx + \frac{ax^2dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = o$, on voit facilement qu'on peut la comparer avec la formule différentielle de l'Exemple I. $-my(ax^{n-1} + \overline{m-1}.x^{-2}) + \frac{ax^n dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = o$, & qu'on aura $ax^n = ax^2$, par consequent $n = 2$; & encore $my(ax^{n-1} + \overline{m-1}.x^{-2}) = my(ax + \overline{m-1}.x^{-2}) = axy$, d'où l'on tire $max + m.\overline{m-1}.x^{-2} = ax$; par consequent $m - 1 = o$, & $m = 1$. Donc l'intégrale complette de l'equation différentielle proposée $ddy + ax^2dydx - ayxdx^2$ sera $y = \alpha x + \beta x.S.\frac{e^{-\frac{1}{3}ax^3dx}\,dx}{xx}$.

DXXIV.

LEMME. L'equation différentielle de l'ordre n, $o = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \&c. \ldots\ldots + \frac{Nd^ny}{dx^n}$,

dans laquelle dx est constante, & les coefficiens A, B, C, D, &c. sont des fonctions de x, peut toujours s'abaisser d'un degré, ou se reduire a l'ordre $n-1$.

La demonstration de ce Lemme est renfermée dans l'Art. CCCCLXXIX.. Il ne faut que faire $y = e^{S.zdx}$, & $L.e = 1$; en prenant les différences, on aura $\frac{dy}{dx} = e^{S.zdx}z$; $\frac{ddy}{dx^2} = e^{S.zdx}(zz + \frac{dz}{dx})$; $\frac{d^3y}{dx^3} = e^{S.zdx} \times (z^3 + \frac{2zdz}{dx} + \frac{ddz}{dx^2})$; &c. substituant ces valeurs pour y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, &c. dans l'equation différentielle proposée, on la reduit a celle-cy, $o = Ae^{S.zdx} + Be^{S.zdx}z + Ce^{S.zdx}(zz + \frac{dz}{dx}) + De^{S.zdx}(z^3 + \frac{2zdz}{dx} + \frac{ddz}{dx^2}) +$ &c., & en divisant par $e^{S.zdx}$, qui se trouve dans tous les termes, on aura $o = A + Bz + C(zz + \frac{dz}{dx}) + D(z^3 + \frac{2zdz}{dx} + \frac{ddz}{dx^2}) +$ &c., equation a deux variables x & z, d'un ordre moindre d'un degré, que la proposée. Car si on suppose $n = 1$, la proposée sera $o = Ay + \frac{Bdy}{dx}$, & la reduite $o = A + Bz$.

Si

Si on ſuppoſe $n=2$, la propoſée ſera $o=Ay+\frac{Pdy}{dx}$ $+\frac{Cddy}{dx^2}$, & la reduite $o=A+Bz+C\left(zz+\frac{dz}{dx}\right)$. Si $n=3$, la propoſée ſera $o=Ay+\frac{Bdy}{dx}+\frac{Cddy}{dx^2}+$ $\frac{Dd^3y}{dx^3}$, & la reduite, $o=A+Bz+C\left(zz+\frac{dz}{dx}\right)+$ $D\left(z^3+\frac{2zdz}{dx}+\frac{ddz}{dx^2}\right)$, & ainſi des autres.

DXXV.

Probleme II. Trouver l'intégrale complette de l'equation différentielle du ſecond ordre $o=Ay+\frac{Bdy}{dx}$ $+\frac{Cddy}{dx^2}$, ou $o=Py+\frac{Qdy}{dx}+\frac{ddy}{dx^2}$, en la reduiſant d'abord a une equation différentielle du premier ordre.

Solution. En ſuppoſant $y=e^{S.zdx}$, on reduira la propoſée a l'equation ſuivante $o=P+Qz+zz+$ $\frac{dz}{dx}$, ou $o=Pdx+Qzdx+zzdx+dz$, qui eſt du premier ordre, & ne contient que deux variables x, & z, a cauſe que les coefficiens P & Q ſont des fonctions de x; on cherchera enſuite l'intégrale de cette equation par les methodes que nous avons données

Fff

pour les equations différentielles de cette espece, & on aura par cette intégrale la valeur de z en x & constantes, ou $z = X$ fonction connue de x. Substituant donc cette fonction au lieu de z dans la différentielle $z\,dx$, on trouvera, par la premiere Partie, l'intégrale $S.\,X\,dx = S.\,z\,dx$, qui sera une autre fonction de x, & par ce que $y = e^{S.\,z\,dx}$, on aura $y = X'$, fonction connue de x, equation qui sera une intégrale particuliere de la différentielle proposée, $o = Py + \frac{Q\,dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2}$. On trouvera donc par le Probleme I. l'intégrale complette de la proposée, qui sera $y = \alpha X' + \beta X'. \times S.\,\frac{e^{-S.\,Q\,dx}\,dx}{X'^2}$. C. Q. F. T.

DXXVI.

PROBLEME III. Trouver les cas, dans lesquels l'equation différentielle (M) du second ordre $(a + bx^n)\frac{x^2\,ddy}{dx^2} + (c + fx^n)\frac{x\,dy}{dx} + (g + hx^n)y = o$, aura pour intégrale particuliere, l'une ou l'autre des deux equations suivantes, ou toutes les deux,

I. $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n}$ $+ \&c.$ suite finie, dans laquelle les coefficiens A, B, C, D, &c. sont constans.

II. $y = A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + D'x^{p-3n}$ $+ \&c.$ autre suite finie avec les coefficients constans.

PREMIER CAS GENERAL.

SOLUTION. On suppose dans ce premier Cas que l'equation finie $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n}$ $+ \&c.$ est une intégrale particuliere de l'equation différentielle (M). On aura donc, en différentiant dans la supposition de dx constante, $dy = mAx^{m-1}dx + \overline{m+n} \,.\, Bx^{m+n-1}dx + \overline{m+2n} \,.\, Cx^{m+2n-1}dx +$ &c., & $ddy = m \,.\, \overline{m-1} \,.\, Ax^{m-2}dx^2 + \overline{m+n} \,.\times \overline{m+n-1} \,.\, Bx^{m+n-2}dx^2 + \overline{m+2n} \,.\, \overline{m+2n-1} \,.\times Cx^{m+2n-2}dx^2 + \&c.$ Substituant ces valeurs pour y, dy, & ddy dans l'equation différentielle (M) on aura l'equation identique suivante

$$\left.\begin{array}{llll}
am.\overline{m-1}.Ax^{m} & +a.\overline{m+n}.\overline{m+n-1}.Bx^{m+n} & +a.\overline{m+2n}.\overline{m+2n-1}.Cx^{m+2n} & +\&c. \\
 & +bm.\overline{m-1}.Ax^{m+n} & +b.\overline{m+n}.\overline{m+n-1}.Bx^{m+2n} & +\&c. \\
+cmAx^{m} & +c.\overline{m+n}.Bx^{m+n} & +c.\overline{m+2n}.Cx^{m+2n} & +\&c. \\
 & +fmAx^{m+n} & +f.\overline{m+n}.Bx^{m+2n} & +\&c. \\
+gAx^{m} & +gBx^{m+n} & +gCx^{m+2n} & +\&c. \\
 & +hAx^{m+n} & +hBx^{m+2n} & +\&c.
\end{array}\right\}=o$$

Cette equation etant ſuppoſée identique, ſes termes homologues ſeront chacun $=o$; le premier terme $am.\times\overline{m-1}.Ax^{m}+cmAx^{m}+gAx^{m}$ etant egalé a zero donnera l'equation $am.\overline{m-1}+cm+g=o$, par laquelle on determinera la valeur de l'expoſant m. Si cette valeur eſt réelle & finie, l'equation $y=Ax^{m}+Bx^{m+n}+$ &c. pourra avoir lieu; mais ſi la valeur de m eſt imaginaire ou infinie, cette equation n'aura point lieu. Or, ſi $a=o$, on aura $m=-\frac{g}{c}$; ſi $g=o$, on aura $m=\frac{a-c}{a}$; ſi $c=o$, on aura $m=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{g}{a}}$, qui ſera réelle, lorſque $\frac{1}{4}-\frac{g}{a}$ ſera une quantité poſitive & m ſera imaginaire, lorſque $\frac{1}{4}-\frac{g}{a}$ ſera une quantité negative, & en general on trouve $m=\frac{a-c\pm\sqrt{(a-c)^{2}-4ag}}{2a}$,

qui ſera réelle, lorſque $(a-c)^2-4ag$ ſera poſitive, & m ſera imaginaire, lorſque $(a-c)^2-4ag$ ſera une quantité negative. Nous ſuppoſerons dans la ſuite que la valeur de m determinée par l'equation $am.\overline{m-1}+cm+g=o$, eſt réelle & finie.

Le ſecond terme de l'equation identique donnera $(a.\overline{m+n}.\overline{m+n-1}+c.\overline{m+n}+g)B+(bm.\overline{m-1}+fm+b)A=o$, ſubſtituant dans cette equation la valeur de $g=-cm-am.\overline{m-1}$, on aura, reduction faite, $(cn+an.(\overline{2m+n-1})B+(bm.\overline{m-1}+fm+b)A=o$; par conſequent $B=\frac{-A(b+fm+bm.\overline{m-1})}{cn+an(2m+n-1)}$.

Faiſant les mêmes operations ſur les termes ſuivans de l'equation identique, on trouve

$$C=\frac{-B(b+f.\overline{m+n}+b.\overline{m+n}.\overline{m+n-1})}{2cn+2an(2m+2n-1)};$$

$$D=\frac{-C(b+f.\overline{m+2n}+b.\overline{m+2n}.\overline{m+2n-1})}{3cn+3an(2m+3n-1)};$$

$$E=\frac{-D(b+f.\overline{m+3n}+b.\overline{m+3n}.m+3n-1)}{4cn+4an(2m+4n-1)};$$

&c.

On voit par là que le coefficient A n'est point determiné, & qu'il sera par consequent une constante arbitraire, dont la determination donnera celle de tous les coefficiens suivants, aprés qu'on aura trouvé la valeur réelle & finie de l'exposant m par l'equation $am.\overline{m-1} + cm + g = o$.

On voit encore que les valeurs de ces coefficiens etant une fois determinées, si un seul d'entr'eux est egal a zero, tous les suivants s'evanoüissent, & la suite $Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} +$ &c. finira par le terme qui precede tous ceux, dont les coefficiens s'evanoüissent. Ainsi, si on suppose $B = o$, le coefficient C, qui est egal au produit de $-B$ par une autre quantité s'evanoüira, & tous les autres coefficiens suivants s'evanoüiront par la même raison; la suite finira par le premier terme Ax^m, qui precede le terme Bx^{m+n}, & l'intégrale particuliere de l'equation différentielle proposée (M) sera $y = Ax^m$. Si on suppose que le premier coefficient qui s'evanoüit soit C, on aura $D = o$, $E = o$, &c., & $y = Ax^m + Bx^{m+n} = Ax^m - \frac{Ax^{m+n}(b + fm + bm.\overline{m-1})}{cn + an(2m + n - 1)}$, & ainsi des autres; en forte que dans tous ces Cas l'equation finie $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} +$ &c. sera un intégrale particuliere de l'equation différentielle proposée (M), dont on trouvera l'intégrale complette & finie par le Probl. I.

Enfin, ſi on fait attention aux valeurs des coëfficients A, B, C, D, &c. que nous avons trouvées cy-deſſus, on comprendra que, P repreſentant un de ces coefficients quelconques, & Q le coefficient qui ſuit après P, on aura la formule generale $Q = \frac{-P(b + f.\overline{m + Nn} + b.\overline{m + Nn}.\overline{m + Nn - 1}}{cn.\overline{N + 1} + an.\overline{N + 1}(2m + n.\overline{N + 1} - 1)}$, & que cette formule ſera telle qu'en y ecrivant ſucceſſivement 0, 1, 2, 3, 4, &c. au lieu de N, on aura, l'une après l'autre, les valeurs des coëfficiens B, C, D, E, &c. Car ſi on ſuppoſe $N = o$, & $P = A$, on aura $Q = \frac{-A(b + fm + bm.\overline{m - 1})}{cn + an(2m + n - 1)} = B$. Si on ſuppoſe $N = 1$ & $P = B$, on aura $Q = \frac{-B(b + f.\overline{m + n} + b.\overline{m + n}.\overline{m + n - 1}}{2cn + 2an(2m + 2n - 1)} = C$, & ainſi des autres. Donc la ſuite $Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} +$ &c. ſera finie toutes les fois, qu'après avoir ſubſtitué pour m ſa valeur determinée par l'equation $am.\overline{m - 1} + cm + g = o$, & pour N un nombre entier poſitif quelconque, ou zero dans la fraction generale (F), ou $\frac{b + f(m + Nn) + b(m + Nn)(m + Nn - 1)}{cn(N + 1) + an(N + 1)(2m + n.\overline{N + 1} - 1)}$ cette fraction s'evanoüira; & alors le nombre des termes de la ſuite finie $Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} +$ &c. ſera $N + 1$. Or la fraction (F) s'evanoüit, lorſ-

que, ſon denominateur etant une quantité finie, ſon numerateur devient $=o$, & encore, lorſque, le numerateur etant une quantité finie, le denominateur devient infini. Mais, par ce qu'on ſuppoſe que toutes les quantités a, b, c, f, b, n, m, & N, qui entrent dans cette fonction, ſont des quantités finies, ou zero, ſon denominateur ne peut devenir infini, non plus que ſon numerateur. Il ſuffira donc de trouver les Cas particuliers ou le numerateur $b+f(m+Nn)+b(m+Nn)(m+Nn-1)$ s'evanoüit par les ſubſtitutions préſcrittes des valeurs de m & de N, pourvû qu'en faiſant les mêmes ſubſtitutions dans le denominateur $cn(N+1)+an(N+1)(2m+n.\overline{N+1}-1)$, il ne s'evanoüiſſe pas auſſi. Car, comme la raiſon de deux quantités infiniment petites, ou qui s'evanoüiſſent a la fois peut-être une quantité finie, on ne doit pas conclure que la fraction (F) s'evanoüit, par ce que ſon numerateur devient nul, ſi ſon denominateur s'evanoüit en même tems.

On trouvera donc les cas particuliers dans leſquels l'equation différentielle (M) aura pour intégrale particuliere l'equation finie $y=Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}$ $+$ &c., en ſe ſervant des deux equations $am.\overline{m-1}+cm+g=o$, & $b+f(m+Nn)+b(m+Nn)(m+Nn-1)=o$; Car, aprés avoir ſubſtitué dans la ſeconde

de equation la valeur réelle, & finie de m, qu'on aura determinée par la premiere equation, on cherchera la valeur de N, que donne la seconde equation, & dans tous les cas, où cette valeur sera un nombre entier positif, ou zero, on aura pour intégrale particuliere de la proposée (M), l'equation finie $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \&c.$, en substituant dans cette intégrale la valeur de m, & les valeurs des coefficiens B, C, D, $\&c.$. Detérminés par les formules que nous avons données cy-dessus, après avoir mis dans ces formules pour m, & pour N leurs valeurs, pourvû cependant qu'en substituant les mêmes valeurs de m, & de N dans le denominateur general $cn(N+1) + an(N+1)(2m + n.\overline{N+1} - 1)$, il ne s'evanoüisse pas. *C. Q. F. T.*

SECOND CAS GENERAL.

SOLUTION. On suppose dans ce second Cas que l'equation finie $y = A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + D'x^{p-3n} + \&c.$ est une intégrale particuliere de l'equation différentielle proposée (M). Donc, en prenant les premieres & les secondes différences dans la supposition de dx constante, on aura $dy = pA'x^{p-1}dx + \overline{p-n}.B'x^{p-n-1}dx + \overline{p-2n}.Cx^{p-2n-1}dx + \&c$;

$ddy = p.\overline{p-1}.\ A'x^{p-2}dx^2 + \overline{p-n}.\ \overline{p-n-1}.\times$ $B'x^{p-n-2}dx^2 + \overline{p-2n}.\overline{p-2n-1}.Cx^{p-2n-2}dx^2$ $+\&c.$ ſubſtituant ces valeurs pour y, dy, ddy dans l'equation différentielle (M), on aura l'equation identique ſuivante

$$\left.\begin{array}{lll} bp.\overline{p-1}.A'x^{p+n} & +b.\overline{p-n}.\overline{p-n-1}.B'x^p & +b.\overline{p-2n}.\overline{p-2n-1}.C'x^{p-n}+\&c. \\ & +ap.\overline{p-1}.A'x^p & +a.\overline{p-n}.\overline{p-n-1}.B'x^{p-n}+\&c. \\ +fp.A'x^{p+n} & +f.\overline{p-n}.B'x^p & +f.\overline{p-2n}.C'x^{p-n}+\&c. \\ & +cp.A'x^p & +c.\overline{p-n}.B'x^{p-n}+\&c. \\ +hA'x^{p+n} & +h.B'x^p & +h.C'x^{p-n}+\&c. \\ & +gA'x^p & +gB'x^{p-n}+\&c. \end{array}\right\} = 0.$$

En egalant a zero les termes homologues de cette equation identique, le premier terme donnera l'equation $h + fp + bp.\overline{p-1} = 0$, par laquelle on determinera la valeur de l'expoſant p, que nous ſuppoſerons réelle & finie; car, ſi elle etoit imaginaire ou infinie, l'equation $y = A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \&c.$ n'auroit point lieu.

Le ſecond terme donnera $(h + f.\overline{p-n} + b.\times$ $\overline{p-n}.\overline{p-n-1})B' + (g + cp + ap.\overline{p-1})A' = 0.$ Subſtituant dans cette equation la valeur de $h = -fp$

$-bp.\overline{p-1}$, on trouvera, reduction faite, $B' = \frac{A'(g+cp+ap.\overline{p-1})}{fn+bn(2p-n-1)}$, & operant de même sur les termes suivants de l'equation identique, on trouvera

$$C' = \frac{B'(g+c.\overline{p-n}+a.\overline{p-n}.\overline{p-n-1})}{2fn+2bn(2p-2n-1)};$$

$$D' = \frac{C'(g+c.\overline{p-2n}+a.\overline{p-2n}.\overline{p-2n-1})}{3fn+3bn(2p-3n-1)};$$

$$E' = \frac{D'(g+c.\overline{p-3n}+a.\overline{p-3n}.\overline{p-3n-1})}{4fn+4bn(2p-4n-1)};$$

&c.

On voit par là, comme dans le premier Cas, 1.° que le coefficient A' n'est point determiné, & qu'il sera par consequent une constante arbitraire, dont la determination donnera celle de tous les coefficients suivants, après qu'on aura trouvé la valeur de l'exposant p, par l'equation $b+fp+bp.\overline{p-1}=0$: 2.° que les valeurs de ces coefficients etant une fois determinées, si un seul d'entr'eux est egal a zero, tous les suivants s'evanoüiront; la suite $A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} +$ &c. finira par le terme, qui precede tous ceux dont les coefficiens s'evanoüissent; & l'equation finie $y = A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} +$ &c. sera une intégrale particuliere de l'equation différentielle (M), dont on

trouvera l'intégrale complette par le Probleme I. : 3.° que P' reprefentant un de ces coefficients quelconque, & Q' le coefficient qui fuit P' immediatement, on aura la formule generale

$$Q' = \frac{(g + c.\overline{p - N'n} + a.\overline{p - N'n}.\overline{p - N'n - 1})}{fn(N + 1) + bn(N' + 1)(2p - n.\overline{N' + 1} - 1)}$$

qui fera telle qu'en y ecrivant fucceffivement les termes de la fuite naturelle o, 1, 2, 3, 4, &c. au lieu de N', on aura, l'une après l'autre, les valeurs des coefficiens B', C', D', &c., d'où l'on conclùt que la fuite $A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \&c.$ fera finie, toutes les fois qu'après avoir fubftitué pour p fa valeur réelle & finie, determinée par l'equation $b + fp + bp.\overline{p - 1} = o$, & pour N' un nombre entier pofitif, ou zero dans la fraction generale (G), ou $\frac{g + c(p - N'n) + a(p - N'n)(p - N'n - 1)}{fn(N' + 1) + bn(N' + 1)(2p + n.\overline{N' + 1} - 1)}$, cette fraction s'evanoüira: & alors $N' + 1$ fera le nombre des termes de la fuite finie $A'x^p + B'x^{p-n} + Cx^{p-2n} + \&c.$

Or la fraction (G) s'evanoüit, lorfque, fon denominateur etant une quantité finie, fon numerateur devient $= o$. Il fuffira donc de trouver les cas particuliers, ou le numerateur $g + c(p - N'n) + a(p - N'n)(p - N'n - 1)$ s'evanoüit par les fubftitutions

préſcrittes des valeurs de m, & de N', pourvû qu'en faiſant les mêmes ſubſtitutions dans le denominateur, $fn(N'+1)+bn(N'+1)(2p+n.\overline{N'+1}-1)$, ce denominateur ne s'evanoüiſſe pas auſſi.

On trouvera donc les cas particuliers dans leſquels l'equation différentielle (M) aura, pour intégrale particuliere, l'equation finie $y=A'x^p+B'x^{p-n}+C'x^{p-2n}$ $+$ &c.. En ſe ſervant des deux equations $b+fp+bp.\overline{p-1}=o$, & $g+c(p-N'n)+a(p-N'n)\times(p-N'n-1)=o$. Car après avoir ſubſtitué dans la derniere equation la valeur réelle & finie de p, qu'on aura determinée par la premiere equation, on cherchera la valeur de N' que donne la ſeconde equation, & dans tous les cas, où cette valeur ſera un nombre entier poſitif, ou zero, on aura, pour intégrale particuliere de la propoſée (M), l'equation finie $y=A'x^p+B'x^{p-n}+C'x^{p-2n}+$ &c., en ſubſtituant dans cette intégrale la valeur de p, & les valeurs des coefficiens B', C', D', &c. determinées par les formules que nous avons données cy-deſſus, après avoir mis dans ces formules pour p, & pour N' leurs valeurs; pourvû cependant qu'en ſubſtituant les mêmes valeurs de p & de N dans le denominateur general $fn(N'+1)+bn(N'+1)(2p+n.\overline{N'+1}-1)$, il ne s'evanoüiſſe pas. *C. Q. F. T.*

TROISIEME CAS GENERAL.

SOLUTION. On ſuppoſe dans ce troiſieme Cas que les deux equations finies $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \&c.$, & $y = A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \&c.$ ſont deux intégrales particulieres de l'equation différentielle propoſée (M). On reſoudra donc ce troiſieme Cas par les deux precedents, en ſe ſervant des quatre equations ſuivantes

I. $g + cm + am(m-1) = 0.$

II. $h + fp + bp(p-1) = 0.$

III. $h + f(m+Nn) + b(m+Nn)(m+Nn-1) = 0.$

IV. $g + c(p+N'n) + a(p-N'n)(p-N'n-1) = 0.$

On determinera d'abord les valeurs des expoſants m & p par la premiere, & par la ſeconde equation. Si ces valeurs ſont réelles & finies, on les ſubſtituera au lieu de m, & de p dans les deux autres equations, & on cherchera enſuite les valeurs de N, & de N', que donnent ces deux dernieres equations. Si ces valeurs ſont des nombres entiers poſitifs, ou zero, les deux equations finies $y = Ax^m + Bx^{m+n} + \&c.$, & $y = A'x^p + B'x^{p-n} + \&c.$ feront deux intégrales particulieres de la différentielle propoſée (M); la ſuite Ax^m

$+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+\&c.$ ayant le nombre des termes $N+1$, & ses coefficients B, C, $\&c.$, etant determinés par les formules du premier cas general ; & de même la suite $A'x^{p}+B'x^{p-n}+C'x^{p-2n}+\&c.$, ayant le nombre de termes $N'+1$, & ses coefficients etant determinés par les formules du second cas general. On trouvera de cette maniere les cas particuliers, dans lesquels l'equation différentielle (M) a pour intégrales particulieres les deux equations $y=Ax^{m}+\&c.$, & $y=A'x^{p}+\&c.$ C. Q. F. T.

DXXVII.

COROLLAIRE I. Les deux premieres des quatre equations, dont nous nous sommes servis dans le troisieme Cas general donnent $g=-cm-a(mm-m)$, & $b=-fp-b(pp-p)$. Substituant pour b, sa valeur dans la troisieme equation $b+f(m+Nn)+b(m+Nn)(m+Nn-1)=o$, on aura $-fp-b\times(pp-p)+f(m+Nn)+b(m+Nn)(m+Nn-1)=o$, d'où l'on tire $f(-p+m+Nn)=b(pp-p)-b(m+Nn)^2+b(m+Nn)$; par consequent $f=\frac{[pp-p-(m+Nn)^2+m+Nn]}{-p+m+Nn}=b\{1-p-(m+Nn)\}$; $\frac{f}{b}=1-p-m-Nn$, & $N=\frac{1-p-m-\frac{f}{b}}{n}$. Or

nous avons demontré, que, si N est un nombre entier positif, ou zero, l'equation finie $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \&c.$, après y avoir substitué la valeur de m tirée de l'equation $g + cm + am.\overline{m-1} = o$, & les valeurs des coefficiens B, C, D, &c. tirées des formules du premier Cas general, sera une intégrale particuliere de l'equation différentielle (M), & que le nombre des termes de la suite $Ax^m + Bx^{m+n} + \&c.$ sera $N+1$; donc ce sera la même chose, lorsque la quantité $\frac{1-p-m-\frac{f}{i}}{n}$ sera un nombre entier positif, ou zero, & alors on trouvera l'intégrale complette de (M) par le Probleme I., puisque la suite finie $Ax^m + Bx^{m+n} + \&c.$ est une fonction de x.

De même, si on substitue pour g sa valeur $-cm - am(m-1)$ dans la quatrieme equation $g + c(p - N'n) + a(p - N'n)(p - N'n - 1) = o$, on aura $-cm - a(mm - m) + c(p - Nn) + a(p - N'n) \times (p - N'n - 1) = o$, d'où l'on tire $c(-m + p - N'n) = a(mm - m) - a(p - N'n)^2 + a(p - N'n)$; par consequent $c = \frac{a[mm - m - (p - N'n)^2 + p - N'n]}{-m + p - N'n} = a \times \{1 - m - (p - N'n)\}$; $\frac{c}{a} = 1 - m - (p - N'n)$, & $N' =$

$N' = \frac{-1+p+m+\frac{e}{a}}{n}$. Or nous avons demontré que, ſi N' eſt un nombre entier poſitif, ou zero, l'equation finie $y = A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} +$ &c., après y avoir ſubſtitué la valeur de p tirée de l'equation $b + fp + bp(p-1) = 0$, & les valeurs des coefficiens B', C', D', &c. tirées des formules du ſecond Cas general, ſera une intégrale particuliere de l'equation différentielle (M), & que le nombre des termes de la ſuite $A'x^p + B'x^{p-n} +$ &c. ſera $N'+1$; donc ce ſera la même choſe, lorſque la quantité $\frac{-1+p+m+\frac{e}{a}}{n}$ ſera un nombre entier poſitif ou zero, & alors on trouvera l'intégrale complette par le Probleme I.

Donc lorſqu'après avoir determiné les valeurs réelles de m & de p par les deux equations $g + cm + am(m-1) = 0$ & $b + fp + bp(p-1) = 0$, on trouve que l'une ou l'autre des deux quantités $\frac{1-p-m-\frac{f}{b}}{n}$, $\frac{-1+p+m+\frac{e}{a}}{n}$ eſt un nombre entier poſitif, ou zero, on trouvera l'intégrale complette de (M) par le Probleme I. Mais, ſi les quantites ſont toutes deux des nombres entiers poſitifs, ou zero, l'intégrale complette

de (M) ſera $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \&c. + A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \&c.$, après avoir ſubſtitué dans les deux ſuites les valeurs de m & de p, & celles des coefficiens $A, B, C, \&c., A', B', C' \&c.$, car cette intégrale contiendra deux conſtantes arbitraires A, & A', A ſe trouvant dans tous les termes de la premiere ſuite, & A' dans tous ceux de la ſeconde.

DXXVIII.

COROLLAIRE II. Une equation différentielle quelconque, de l'ordre & de la forme de l'equation generale (M), etant donnée, on peut aiſément trouver ſi elle eſt intégrable par le Probleme III., & quelle eſt ſon intégrale complette. Pour cet effet, 1.° On egalera tous les termes de l'equation donnée aux termes homologues de l'equation (M), & on determinera par là les valeurs des lettres a, b, c, f, g, h, & n. 2.° On ſubſtituera ces valeurs dans les deux equations $g + cm + a(mm - m) = o$, & $h + fp + b(pp - p) = o$; enſuite on cherchera par ces deux equations les valeurs de m & de p. 3.° Si ces valeurs ne ſont ny imaginaires ny infinies, on les ſubſtituera, auſſi bien que les valeurs des autres lettres a, b, c, f, n dans les deux quantites $\frac{1 - p - m - \frac{f}{b}}{n}$, & $\frac{\frac{c}{a} + p + m - 1}{n}$. Si après ces ſub-

ſtitutions l'une ou l'autre de ces deux quantités, ou toutes les deux deviennent des nombres entiers poſitifs ou zero, on trouvera l'intégrale complette de la différentielle propoſée par le Corollaire precedent.

EXEMPLE I. Soit l'equation donnée $(1+x^3)\times\frac{x^2ddy}{dx^2}+(1+2x^3)\frac{xdy}{dx}-y(4+6x^3)=o$. En la comparant avec l'equation generale (M), ou $(a+bx^n)\times\frac{x^2ddy}{dx^2}+(c+fx^n)\frac{xdy}{dx}+y(g+hx^n)=o$, on trouvera $a=1$, $b=1$, $c=1$, $f=2$, $g=-4$, $h=-6$, & $n=3$; l'equation $g=-cm-am(m-1)$ devient $4=mm$, d'où l'on tire $m=2$. L'equation $h=-fp-b(pp-p)$ devient $6=pp+p$; d'où l'on tire $p=-3$, & $p=2$. En ſe ſervant des valeurs $2=m$, & $-3=p$, l'equation $N=\frac{1-p-m-\frac{f}{b}}{n}$ devient $N=\frac{1+3-2-2}{3}=o$, & l'equation $N'=\frac{\frac{c}{a}+p+m-1}{n}$ devient $N'=\frac{1-3+2-1}{3}=-\frac{1}{3}$. On aura donc, pour intégrale particuliere de l'equation donnée $y=Ax^2$; & en effet, ſi on ſubſtitue Ax^2 pour y, $2Axdx$ pour dy, $2Adx^2$ pour ddy dans l'equation donnée, elle

deviendra identique. Mais l'autre intégrale particuliere $y = A'x^{-3} + B'x^{-6} + \&c.$ n'aura point lieu, puisque N' n'est pas un nombre entier positif ny zero.

Si on s'etoit servi des valeurs $2 = m$, & $2 = p$, on auroit eû les equations $N = -\frac{5}{3}$, & $N' = \frac{4}{3}$ qui ne donnent point d'intégrales finies, & $N' = 0$, qui donne l'intégrale $A'x^2$, qui est la même que nous avons trouvée, en supposant $2 = m$, & $-3 = p$. Enfin, si on se sert des valeurs $-2 = m$, & $-3 = p$, on aura $N = \frac{4}{3}$, & $N' = -\frac{5}{3}$ qui ne donnent point d'intégrales finies.

EXEMPLE II. Soit l'equation donnée $(1 + x^3) \times \frac{x^2 ddy}{dx^2} + (5 + 2x^3)\frac{xdy}{dx} - y(12 + 6x^3) = 0$. En la comparant avec l'equation (M), on trouve $a = 1$, $b = 1$, $f = 2$, $c = 5$, $g = -12$, $b = -6$, & $n = 3$. L'equation $g = -cm - a(mm - m)$ devient $12 = mm + 4m$, d'où l'on tire $m = 2$, & $m = -6$. L'autre equation $b = -fp - b(pp - p)$ devient $6 = pp + p$; d'où l'on tire $p = -3$, & $p = 2$. En prenant $m = 2$, & $p = -3$, on trouve $N = \frac{1 - p - m - \frac{f}{b}}{n} = \frac{1 + 3 - 2 - 2}{3}$

$=o$, & $N' = \frac{\frac{e}{f}+p+m-1}{3} = \frac{5-3+2-1}{3} = 1$. On aura donc les deux intégrales particulieres $y = Ax^2$, & $y = A'x^p + B'x^{p-n} = A'x^{-3} + B'x^{-6}$. Mais par ce que $B' = \frac{A'(g+cp+a.\overline{pp-p})}{fn+bn(2p-n-1)} = \frac{5}{8}A'$, cette intégrale fera $y = Ax^2 + A'x^{-3} + \frac{5}{8}A'x^{-6}$. En effet, fi on fubftitue cette valeur de y, & les valeurs de fes différences premieres & fecondes, pour y, dy, ddy dans l'equation donnée, on trouvera qu'elle devient identique.

DXXIX.

COROLLAIRE III. Si, en fuppofant $L.e = 1$, on fait $y = e^{S.udx}$, on aura, en différentiant, $\frac{dy}{dx} = e^{S.udx}u$, & $\frac{ddy}{dx^2} = e^{S.udx}\left(\frac{du}{dx} + uu\right)$. Subftituant ces valeurs dans l'equation (M), on aura pour fa transformée (V), $(a+bx^n)x^2du + (a+bx^n)u^2x^2dx + (c+fx^n)uxdx + (g+bx^n)dx = o$; equation différentielle du premier ordre, qui fera intégrable dans tous les cas, dans lefquels on pourra intégrer l'equation (M); c'eft a dire, dans tous les cas, dans lefquels, après

avoir determiné les valeurs de m & de p par les deux equations $g = -cm - a(mm - m)$, & $h = -fp - b \times (pp - p)$, on trouvera que N, ou N' eſt un nombre entier poſitif, ou zero dans les equations $N = \frac{1 - p - m - \frac{f}{b}}{n}$, & $N' = \frac{\frac{c}{a} + p + m - 1}{n}$. Car ſi on fait $u = \frac{dy}{ydx}$, on aura $du = \frac{ddy}{ydx} - \frac{dy^2}{y^2dx}$, & ſubſtituant ces valeurs pour u, & pour du dans l'equation (V), on retrouvera l'equation (M). Suppoſé donc qu'on ait trouvé une intégrale de l'equation (M) & que cette intégrale ſoit $y = X$ fonction connüe de x, on aura $dy = dX = X'dx$, X' etant encore une fonction connüe de x; & ſubſtituant ces valeurs pour y & pour dy dans l'equation $u = \frac{dy}{ydx}$, on aura $u = \frac{X'}{X}$ fonction connüe de x, qui ſera une intégrale de l'equation (V).

DXXX.

REMARQUE. Si on transforme l'equation (V) en d'autres equations différentielles, elles ſeront toutes intégrables dans les Cas, dans leſquels l'equation (M)

peut s'intégrer; & on peut trouver par là une infinité d'equations différentielles du premier ordre, qu'on pourra intégrer en les reduisant a l'equation différentielle du second ordre (M). Nous allons en donner des exemples dans le Probleme suivant & dans ses Corollaires.

DXXXI.

PROBLEME IV. Transformer l'equation différentielle (V), $(a+bx^n)x^2du+(a+bx^n)u^2x^2dx+(c+fx^n)uxdx+(g+bx^n)dx=o$, dans une autre de trois termes de la forme suivante $dz+Pz^2dx+Qdx=o$, P & Q etant des fonctions de x.

SOLUTION. En supposant $u=Xz$, on aura $du=zdX+Xdz$, & substituant ces valeurs pour u, & pour du dans l'equation (V), on aura la transformée $(a+bx^n)zx^2dX+(a+bx^n)x^2Xdz+(a+bx^n)\times X^2z^2x^2dx+(c+fx^n)Xzxdx+(g+bx^n)dx=o$. Supposant ensuite $(c+fx^n)Xzxdx+(a+bx^n)\times zx^2dX=o$, ou bien, en divisant par zx, $(c+fx^n)\times Xdx+(a+bx^n)xdX=o$, la transformée dans cette

ſuppoſition ſera $(a+bx^n)x^2Xdz+(a+bx^n) \times X^2z^2x^2dx+(g+bx^n)dx=o$, ou $dz+z^2Xdx+\frac{(g+bx^n)dx}{(a+bx^n)x^2X}$, qui a la forme qu'on cherche, pourvû que X ſoit une fonction de x. Or on trouve cette valeur de X par l'equation $(c+fx^n)Xdx+(a+bx^n)xdX=o$, ou $\frac{(c+fx^n)dx}{(a+bx^n)x}+\frac{dX}{X}=o$. Car, en donnant au premier membre de cette equation la forme ſuivante $\frac{acx^{-1}dx+afx^{n-1}dx}{aa+abx^n}$, ſi on y ajoûte, & qu'on en retranche en même tems la quantité $\frac{bcx^{n-1}dx}{aa+abx^n}$, on aura pour ce premier membre

$$\frac{acx^{-1}dx+bcx^{n-1}dx+afx^{n-1}dx-bcx^{n-1}dx}{aa+abx^n}=\frac{cdx}{ax}+\frac{(af-bc)x^{n-1}dx}{a(a+bx^n)};$$

& l'equation entiere ſera $\frac{cdx}{ax}+\frac{(af-bc)x^{n-1}dx}{a(a+bx^n)}+\frac{dX}{X}=o$, dont l'intégrale eſt $\frac{c}{a}L.x+\frac{(af-bc)}{abn}.L.(a+bx^n)+L.X=o$, en ſuppoſant la conſtante $=o$. Donc $L.X=\frac{bc-af}{abn}.L.(a+bx^n)-\frac{c}{a}L.x=L.(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}-L.x^{\frac{c}{a}}=L.\frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}}{x^{\frac{c}{a}}}$;

pair

par conſequent $X = \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}}{x^{\frac{c}{a}}}$, fonction de x.

Donc la transformée $dz + z^2 X dx + \frac{(g+bx^n)dx}{(a+bx^n)x^2 X} = 0$, en y ſubſtituant la valeur de X, qu'on vient de trouver, ſera $dz + \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} z^2 dx}{x^{\frac{c}{a}}} + \frac{(g+bx^n)x^{\frac{c}{a}-2} dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}}$ $= 0$, que nous deſignerons par (Z). *C. Q. F. T.*

DXXXII.

Corollaire I. Cette equation (Z) ſera intégrable par le Corollaire III. du Probleme III. toutes les fois qu'après avoir determiné les valeurs de m, & de p par les deux equations $g = -cm - a(mm-m)$, & $b = -fp - b(pp-p)$, on trouvera que N, ou N' eſt un nombre entier poſitif ou zero, dans l'une & l'autre de ces deux equations, $N = \frac{1-p-m-\frac{f}{b}}{n}$, & N' $= \frac{\frac{c}{a}+p+m-1}{n}$. Si N eſt un nombre entier poſitif ou zero, on aura l'equation $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \&c.$; $N+1$ etant le nombre des termes

de cette ſuite, & les coefficients B, C, D, *&c.* etant determinés par le premier Cas general du Probleme III. Alors on aura $u = \frac{dy}{y\,dx} =$

$$\frac{mAx^{m-1} + (m+n)Bx^{m+n-1} + (m+2n)Cx^{m+2n-1} + \&c.}{Ax^{m} + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \&c.}$$

(Probl. III. Coroll. III.), &, par ce que les valeurs des coefficients B, C, D, *&c.* ſont chacune des produits de la conſtante arbitraire A multipliée par d'autres conſtantes determinées (Probl. III. Cas I.), il eſt evident que cette conſtante arbitraire A s'evanoüira de la valeur de u, en diviſant par A le numerateur, & le denominateur de la fraction qui eſt $= u$. De plus, par ce que dans la ſolution du Probleme IV. nous avons ſuppoſé $Xz = u$, $z = \frac{u}{X} = \frac{x^{\frac{e}{a}}}{(a+bx^n)^{\frac{be-af}{abn}}} \times$

$$\frac{mAx^{m-1} + (m+n)Bx^{m+n-1} + (m+2n)Cx^{m+2n-1} + \&c.}{Ax^{m} + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \&c.}$$

$+ A$ conſtante arbitraire, equation qui ſera l'intégrale complette de l'equation différentielle (Z).

Si N' eſt un nombre entier poſitif ou zero, on aura l'equation $y = Ax^{p} + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \&c.$; $N'+1$ etant le nombre des termes de cette ſuite, & les coefficients B', C', D', *&c.* etant determinés par

le ſecoud Cas du Probleme III.. Alors on aura $u =$

$$\frac{dy}{y\,dx} = \frac{pA'x^{p-1} + (p-n)B'x^{p-n-1} + (p-2n)C'x^{p-2n-1} + \&c.}{A'x^{p} + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \&c.}$$

fraction d'où la conſtanie arbitraire A' diſparoitra par la diviſion. Donc l'intégrale complette de l'equation différentielle (Z) ſera dans ce Cas $z = \frac{x^{\frac{c}{a}}}{(a+bx^{n})^{\frac{bc-af}{abn}}} \times$

$$\frac{pA'x^{p-1} + (p-n)B'x^{p-n-1} + (p-2n)C'x^{p-2n} + \&c.}{A'x^{p} + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \&c.} + A'$$

conſtante arbitraire.

DXXXIII.

COROLLAIRE II. On peut par différentes ſuppoſitions deduire de l'equation (Z) une infinité d'autres equations différentielles toutes intégrables de la même maniere, dont on ſe ſert pour intégrer cette equation (Z). En voici quelques Exemples.

Si on ſuppoſe $bc = af$ dans l'equation (Z), elle deviendra $(G)\, dz + z^{2} x^{-\frac{c}{a}} dx + \frac{(g+bx^{n})x^{\frac{c}{a}-2}dx}{a+bx^{n}} = 0$

& ſi on fait dans celle-cy $x^{\frac{a-c}{a}} = t$, on aura $x = t^{\frac{a}{a-c}}$, $dx = \frac{a}{a-c} t^{\frac{a}{a-c}-1} dt$, & ſubſtituant ces valeurs

pour x & pour dx dans l'equation (G), on trouvera, reduction faite, l'equation $(H)\, dz + \frac{az^2dt}{a-c} + \frac{a\left(g+bt^{\frac{an}{a-c}}\right)dt}{(a-c)\left(a+bt^{\frac{an}{a-c}}\right)tt} = o$. des deux equations $g = -cm - a(mm-m)$, & $b = -fp - b(pp-p)$, par lesquelles on determine les valeurs des exposans m, & p, la premiere ne change point, & la seconde devient $b = -\frac{b}{a}(cp + a.\overline{pp-p})$, en y substituant $\frac{bc}{a}$ au lieu de f. Des deux autres equations $N = \frac{1-p-m-\frac{f}{b}}{n}$, & $N' = \frac{\frac{c}{a}+p+m-1}{n}$, la premiere devient $N = \frac{1-p-m-\frac{c}{a}}{n}$, la seconde demeurant la même, de sorte que, si $N = o$, on aura aussi $N' = o$. Si N est un nombre positif, N' sera le même nombre pris negativement, & reciproquement. Donc les deux equations (G) & (H) seront intégrables par le Corollaire precedent, lorsqu'on aura $\frac{c}{a} = 1-p-m$, ou $\frac{c}{a} = p+m-1$, & encore lorsque $\frac{1-p-m-\frac{c}{a}}{n}$, ou $\frac{\frac{c}{a}+p+m-1}{n}$ sera un nombre entier positif ou negatif.

Si on ſuppoſe de plus $c = o$ dans l'equation (G), elle deviendra $dz + z^2 dx + \frac{(g + b x^n) dx}{(a + b x^n) x^2} = o$, & on aura les equations $g = -a(mm - m)$, & $b = -b \times (pp - p)$; $N = \frac{1 - p - m}{n}$; & $N' = \frac{p + m - 1}{n}$; par conſequent l'equation, que nous venons de trouver ſera intégrable, lorſque $\frac{p + m - 1}{n}$, ou $\frac{1 - p - m}{n}$ ſera un nombre entier poſitif, ou negatif, ou zero.

Si on ſuppoſe $c = a$ dans l'equation (G), elle deviendra $dz + \frac{z^2 dx}{x} + \frac{(g + b x^n) dx}{(a + b x^n) x} = o$, qui ſera intégrable par le Probleme precedent, lorſque $\frac{p + m}{n}$ ſera un nombre entier, poſitif, ou negatif, ou zero.

Si on ſuppoſe $c = -a(n - 1)$ dans l'equation (Z), elle deviendra (K), $dz + (a + b x^n)^{\frac{b - f}{bn} - 1} \times z^2 x^{n - 1} dx + \frac{(g + b x^n) dx}{x^{n + 1} (a + b x^n)^{\frac{b - f}{bn}}} = o$, & cette même equation (K), en faiſant $(a + b x^n)^{\frac{b - f}{bn}} = t$, après les ſubſtitutions & les reductions ordinaires, devient (L), $dz + \frac{z^2 dt}{b - f} + \frac{b\left(bg - ab + bt^{\frac{bn}{b - f}}\right) t^{\frac{bn}{b - f} - 1} dt}{(b - f)\left(t^{\frac{bn}{b - f}} - a\right)^2} = o$. Ces deux

equations (K) & (L) feront intégrables par le Corollaire precedent, lors qu'après avoir determiné les valeurs de p & de m par les deux equations $b = -fp - b(pp-p)$, & $g = -cm - a(mm-m) = am(n-m)$, on trouvera que N, ou N' eſt un nombre entier poſitif, ou zero dans les deux autres equations $N = \frac{1-p-m-\frac{f}{b}}{n}$, & $N' = \frac{\frac{c}{a}+p+m-1}{n} = \frac{p+m-n}{n}$, qu'on trouve en ſubſtituant $-n+1$ pour $\frac{c}{a}$.

DXXXIV.

REMARQUE. On peut encore reſoudre le Probleme IV. de la maniere ſuivante. On ſuppoſe $u = Xz + R$, R etant une fonction inconnuë de x, & X en etant une autre priſe a volonté, & dont on connoit par conſequent la différence $dX = X'dx$. On aura, en différentiant $du = Xdz + zX'dx + dR$, & ſubſtituant ces valeurs de u, & de du dans l'equation (V), ou $(a+bx^n)x^2du + (a+bx^n)u^2x^2dx + (c+fx^n)uxdx + (g+bx^n)dx = o$, on trouvera pour la transformée $(a+bx^n)x^2Xdz + (a+bx^n)x^2zX'dx + (a+bx^n)\times$

$x^2 dR + (a + bx^n) x^2 X^2 z^2 dx + 2(a + bx^n) x^2 XRzdx + (a + bx^n) x^2 R^2 dx + (c + fx^n) Xzxdx + (c + fx^n) \times Rxdx + (g + bx^n) dx = o$.

Pour donner a cette transformée la forme qu'on demande dans le Probleme IV., on fera evanouir les trois termes affectés de z, en suppofant $(a + bx^n) \times x^2 zX'dx + (a + bx^n) x^2 zX'dx + 2(a + bx^n) x^2 XRzdx + (c + fx^n) Xzxdx = o$, & on tirera de cette equation la valeur de $R = -\frac{X'}{2X} - \frac{c + fx^n}{2x(a + bx^n)}$, qui fera une fonction connuë de x. Puifqu'on fuppofe que X & X' font des fonctions connuës de x, &, en différentiant, on connoitra dR, que nous fuppoferons $= R'dx$, R' etant une fonction connuë de x.

Or la transformée, après en avoir retranché les trois termes, que nous avons fait evanoüir, & fubftitué $R'dx$ pour dR, devient (Y), $(a + bx^n) x^2 Xdz + (a + bx^n) x^2 R'dx + (a + bx^2) x^2 X^2 z^2 dx + (a + bx^n) \times x^2 R^2 dx + (c + fx^n) Rxdx + (g + bx^n) dx = o$, qu'on reduit, en divifant par $(a + bx^n) x^2 X$, a la forme $dz + z^2 Xdx + \left\{ \frac{R'}{X} + \frac{R^2}{X} + \frac{(c + fx^n) Rx + (g + bx^n)}{(a + bx^n) x^2 X} \right\} dx = o$ qui eft celle qu'on demandoit dans le Probleme IV.

On trouvera l'intégrale de cette equation (Y) de la même maniere que nous avons trouvé celle de l'equation (Z) dans tous les Cas, dans lesquels, après avoir determiné les valeurs de m & de p par les deux equations $g = -cm - a(mm - m)$, & $h = -fp - b(pp - p)$, on trouvera que N, ou N' est un nombre entier positif, ou zero dans les deux autres equations $N = \frac{1 - p - m - \frac{f}{b}}{n}$, & $N' = \frac{\frac{c}{a} + p + m - 1}{n}$.

On pourra aussi tirer de l'equation (Y) d'autres formules d'equations différentielles intégrables dans les mêmes Cas, & de la même maniere, en faisant différentes suppositions par rapport aux constantes & aux variables, qui entrent dans cette equation. Nous ne nous étendrons point sur cette matiere, qui n'a d'autres difficultés que le choix des suppositions, & la longueur des calculs. Nous remarquerons seulement que, la fonction X etant arbitraire, elle fournit une infinité de suppositions generales différentes.

DXXXV.

PROBLEME V. L'intégrale de l'equation différentielle de trois termes (F), $\frac{ddu}{dx^2} + \frac{Pdu}{dx} + Qu = 0$ etant donnée, trouver celle de l'equation différentielle de quatre termes (G), $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{Pdy}{dx} + Qy + R = 0$, P, Q, R etant des fonctions de x, & dx constante.

SOLU-

SOLUTION. 1° Supposé que l'equation $u = X$ fonction connuë de x soit l'intégrale donnée de l'equation différentielle (F): prenez la différence dX de cette fonction, & divisez-là par dx, pour avoir X' autre fonction connuë de x.

2° Cherchez (par l'Art. CCCLXXXII.) l'intégrale de l'equation différentielle $dr - \frac{rQXdx}{X'} - \frac{RXdx}{X'} = o$, dans laquelle $\frac{QX}{X'}$, & $\frac{RX}{X'}$ sont des fonctions connuës de x, & que cette intégrale soit $r = Z$ autre fonction connuë de x: prenez en la différence dZ, & divisez-là par dx, pour avoir Z' fonction de x.

3° Cherchez encore (par le même Article CCCLXXXII.) l'intégrale de l'equation différentielle $dz - \frac{zX'dx}{X} - Z'dx = o$, & que cette intégrale soit $z = Y$ fonction de x, on aura l'equation $y = Z - Y$ pour l'intégrale de l'equation différentielle de quatre termes (G). *C. Q. F. T.*

DEMONSTRATION. Si on suppose $dy + Tzdx = o$, T & z etant deux nouvelles variables, on aura $dy = -Tzdx$, & $ddy = -Tdzdx - zdTdx$. Substituant ces valeurs pour dy, & pour ddy dans l'equation (G), on aura $-\frac{Tdz}{dx} - \frac{zdT}{dx} - zPT +$

$Qy + R = o$, ou, en multipliant par $\frac{dx}{T}$, & changeant les fignes $dz + zPdx + \frac{zdTdx}{Tdx} - \frac{Qydx}{T} - \frac{Rdx}{T} = o$; ajoutant l'equation $dy + zTdx = o$, on aura (H), $dy + dz + \left(zT + zP + \frac{zdT}{Tdx} - \frac{Qy}{T}\right)dx - \frac{Rdx}{T} = o$. Cette equation (H) feroit intégrable, fi elle pouvoit fe reduire a la forme (K), $dy + dz + (y+z)Vdx - \frac{Rdx}{T} = o$, fuppofé que V & T fuffent des fonctions connuës de x; car en faifant $r = y + z$, on auroit $dr = dy + dz$, & l'equation (K) deviendroit $dr + rVdx - \frac{R}{T}dx = o$, dont on trouveroit l'intégrale $r = Z$ fonction connuë de x (par l'Article CCCLXXXII.), &, en différentiant, on auroit $dr = dy + dz = dZ = Z'dx$, & $dy = Z'dx - dz$, Z' etant encore une fonction connuë de x. Enfuite fubftituant pour dy fa valeur $Z'dx - dz$ dans l'equation $dy + zTdx = o$, on auroit, en changeant les fignes, $dz - zTdx - Z'dx = o$, autre equation, dont on trouveroit encore l'intégrale $z = \Gamma$, fonction connuë de x (par l'Art. CCCLXXXII.). On auroit donc par les fup-

positions que nous avons faites $y=Z-Y$, pour l'intégrale de l'equation différentielle de quatre termes (G). Car, puisque $r=y+z$, $r=Z$, & $z=Y$, on aura $y=r-z=Z-Y$ fonction connuë de x. Il ne s'agit donc plus que de reduire l'equation (H) a la forme (K), & de trouver les valeurs de T & de V en fonctions de x.

Or l'equation (H), ou $dy+dz+(zT+zP+\frac{zdT}{Tdx}-\frac{Qy}{T})dx-\frac{Rdx}{T}=0$ se changera en (K), ou $dy+dz+(z+y)Vdx-\frac{Rdx}{T}=0$, si on fait $\left(T+P+\frac{dT}{Tdx}\right)z-\frac{QY}{T}=Vz+Vy$, ou $T+P+\frac{dT}{Tdx}=-\frac{Q}{T}$, & $Qdx+TTdx+PTdx+dT=0$. De plus, si on suppose $u=e^{S.tdx}$, t etant une nouvelle variable, & $L.e=1$, on aura $du=e^{S.tdx}tdx$, $ddu=e^{S.tdx}dtdx+e^{S.tdx}ttdx^2$; & substituant ces valeurs pour du, & pour ddu dans l'équation de trois termes (F) on la transformera dans l'equation suivante, $e^{S.tdx}\times\frac{dt}{dx}+e^{S.tdx}tt+Pe^{S.tdx}t+Qe^{S.tdx}=0$, laquelle

etant divisée par $e^{S.t\,dx}$, & multipliée par dx, devient $Q\,dx + tt\,dx + Pt\,dx + dt = o$, equation, qui est la même que $Q\,dx + TT\,dx + PT\,dx + dT = o$, que nous avons trouvée cy-dessus; donc les valeurs de t, & de T, qu'on trouveroit en intégrant ces deux equations doivent être la même fonction de x.

Maintenant, pour trouver cette fonction de x, qui est $= T$, on fera attention aux trois equations $T = t$, $u = X$, & $u = e^{S.t\,dx}$, d'où l'on tire $X = e^{S.T\,dx}$, par consequent $L.X = L.e^{S.T\,dx} = S.T\,dx.L.e = S.T\,dx$, a cause de $L.e = 1$. En différentiant de part & d'autre, on aura $\frac{dX}{X} = T\,dx$; mais on suppose icy $dX = X'dx$, donc on aura $T = \frac{X'}{X}$, fonction connuë de x; & puisque $V = -\frac{Q}{T}$, on aura aussi $V = -\frac{QX}{X'}$, fonction connuë de x. Donc l'equation $dr + rV\,dx - \frac{R\,dx}{T} = o$ deviendra $dr - \frac{rQX\,dx}{X'} - \frac{RX}{X'}dx = o$, comme nous l'avons mise dans la solution, & son intégrale sera $z = \Gamma$, fonction connuë de x. Donc l'intégrale de l'equation différentielle de quatre termes (G) sera $y = Z - \Gamma$. C. Q. F. D.

DXXXVI.

COROLLAIRE I. L'equation différentielle de quatre termes (G) sera intégrable dans tous les Cas, dans lesquels l'equation différentielle de trois termes (F) pourra s'intégrer.

DXXXVII.

COROLLAIRE II. Pour trouver une intégrale de l'equation différentielle de quatre termes $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{Pdy}{dx} + Qy + R = o$, on n'a qu'a retrancher de cette equation le terme R, & ayant mis u pour y dans les autres termes, chercher par les Problemes precedens l'intégrale de l'equation différentielle de trois termes $\frac{ddu}{dx^2} + \frac{Pdu}{dx} + Qu = o$. Ensuite on trouvera l'intégrale de l'equation différentielle de quatre termes par le present Probleme V.

DXXXVIII.

PROBLEME VI. Une intégrale particuliere de l'equation différentielle de trois termes $Au + \frac{Bdu}{dx}$

$+\frac{Cddu}{dx^2}=0$ etant donnée, trouver l'intégrale complette de l'equation différentielle de quatre termes $D+Ay+\frac{Bdy}{dx}+\frac{Cddy}{dx^2}=0$, A, B, C, D etant des fonctions de x, & dx constante.

SOLUTION. 1.° Divisez les deux equations proposées par la fonction C, & ayant fait $\frac{D}{C}=R$, $\frac{A}{C}=P$, $\frac{B}{C}=Q$, reduisez ces deux equations aux suivantes $(F)\ \frac{ddu}{dx^2}+\frac{Pdu}{dx}+Qu=0$, & $(G)\ \frac{ddy}{dx^2}+\frac{Pdy}{dx}+Qy+R=0$.

2.° L'intégrale particuliere donnée de l'equation différentielle de trois termes (F) etant supposée $u=X$ fonction connuë de x, cherchez par le Probleme I. une autre intégrale particuliere de la même equation (F), & que cette seconde intégrale soit representée par l'equation $u=Z$, autre fonction connuë de x.

3.° Cherchez ensuite par le Probleme V. les deux intégrales particulieres de l'equation différentielle de quatre termes (G), lesquelles repondent aux deux intégrales $u=X$, & $u=Z$, & que ces deux intégrales de l'equation (G) soient representées par les deux equations suivantes $y=V$ fonction connuë de x, & $y=Y$ autre fonction connuë de x, on aura, pour

l'intégrale complette de l'equation (G), $y = \alpha V + \beta Y$, α & β etant deux conſtantes arbitraires.

Car puiſque $y = V$, & $y = Y$ ſont deux intégrales particulieres de l'equation différentielle (G), ces deux equations $y = \alpha V$, & $y = \beta Y$ en ſeront auſſi deux intégrales particulieres & l'equation $y = \alpha V + \beta Y$ en ſera l'intégrale complette, ainſi qu'on l'a vû dans le Chapitre precedent.

DXXXIX.

On voit par les Problemes precedents, qu'etant donnée l'intégrale d'une equation différentielle de trois termes, de la forme $\frac{ddu}{dx^2} + \frac{Pdu}{dx} + Qu = o$, on pourra toujours trouver l'intégrale d'une equation différentielle de quatre termes, de la forme $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{Pdy}{dx} + Qy + R = o$, P, Q, R etant des fonctions de x, & dx etant conſtante; c'eſt a dire, que, ſi on ſuppoſe $R = o$ dans l'equation différentielle de quatre termes, & que dans cette ſuppoſition on trouve l'intégrale de $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{Pdy}{dx} + Qy = o$, on trouvera auſſi l'intégrale de la différentielle, en ſuppoſant R fonction de x.

De même ſi on trouve l'intégrale de la différen-

tielle de cette forme $D + Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} = o$, dans la ſuppoſition de $D = o$, on pourra trouver l'intégrale complette de cette différentielle, en ſuppoſant D fonction de x. Cette methode ſeroit applicable aux equations différentielles du 3me, 4me, &c. ordre, avec les mêmes conditions; d'où il paroit qu'on pourroit conclûre generalement qu'il en ſeroit de même a l'egard de toute equation différentielle d'un ordre quelconque; mais nous demontrerons directement cette belle propoſition de Calcul Intégral.

DXL.

Soit l'equation différentielle (A) $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{Md^my}{dx^m} = X$, dans laquelle A, B, C, ... M, X ſont des fonctions de x; ſi on a l'intégrale d'une différentielle d'un degré quelconque de la forme precedente, dans la ſuppoſition de $X = o$, on pourra auſſi trouver l'intégrale, dans la ſuppoſition de X fonction de x.

Pour le demontrer, on multipliera l'equation (A) par zdx, z etant une variable indeterminée; l'intégrale

le sera $S.Azydx + S.Bz\frac{dy}{dx}dx + S.Cz\frac{ddy}{dx^2}dx +$ $S.Dz\frac{d^3y}{dx^3}dx + \&c. = S.Xzdx$. On changera ensuite chaque intégrale precedente, sçavoir $S.Bz\frac{dy}{dx}dx$, $S.Cz\frac{ddy}{dx^2}dx$, $S.Dz\frac{d^3y}{dx^3}dx$, en son expression equivalente (Art. CCCXVII.) $Bzy - S.\frac{d.Bz}{dx}ydx$; $Cz\frac{dy}{dx} - \frac{d.Cz}{dx}y + S.\frac{d^2.Cz}{dx^2}ydx$; $Dz\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d.Dz}{dx}.\frac{dy}{dx} + \frac{d^2.Dz}{dx^2}y - S.\frac{d^3.Dz}{dx^3}ydx$; &c. en observant que le signe d, d^2, &c. de différentiation n'affecte que les quantités variables qui lui sont jointes. On ordonne ensuite les termes de cette equation par rapport a y, pour avoir l'expression $y\left(Bz - \frac{d.Cz}{dx} + \frac{d^2.Dz}{dx^2} - \&c.\right) + \frac{dy}{dx} \times \left(Cz - \frac{d.Dz}{dx} + \&c.\right) + \frac{d^2y}{dx^2}(Dz - \&c.) + \&c. +$ $S.\left(Az - \frac{d.Bz}{dx} + \frac{d^2.Cz}{dx^2} - \frac{d^3.Dz}{dx^3} + \&c.\right)ydx =$ $S.Xzdx$.

Supposons maintenant l'equation (B), $Az - \frac{d.Bz}{dx} + \frac{d^2.Cz}{dx^2} - \frac{d^3.Dz}{dx^3} + \&c. = o$, l'equation precedente

(A) ſe reduira a celle-cy (C), $y\left(Bz - \frac{d.Cz}{dx} + \frac{d^2.Dz}{dx^2} - \&c.\right) + \frac{dy}{dx}\left(Cz - \frac{d.Dz}{dx} + \&c.\right) + \frac{d^2y}{dx^2}(Dz - \&c.) + \&c. = S.zXdx$. Or cette equation eſt d'un ordre différentiel moins elevé d'une unité que la premiere equation (A). Donc 1.° Si on a une valeur de z, qui ſatisfaſſe a l'equation (B), on aura une intégrale de l'equation (A) en ſubſtituant cette valeur dans l'equation (C). 2.° Si on peut trouver deux valeurs de z, qui ſatisfaſſent a l'equation (B), on aura de même, en ſubſtituant ces valeurs dans l'equation (C), deux intégrales de l'equation (A), au moyen deſquelles on fera diſparoitre la plus haute différentielle de y, ce qui donnera une ſeconde intégrale de la propoſée; & ainſi de ſuite on trouveroit différentes intégrales, ſi on avoit trois, quatre, &c. valeurs différentes de z; & en general connoiſſant un nombre de valeurs de z egal a celuy de l'expoſant de l'ordre de l'equation (A), on auroit le valeur finie & algebrique de cette equation.

DXLI.

Si on multiplie l'equation (B) par ydx, &, ſi on en prend l'intégrale par parties comme nous avons fait a l'egard de l'equation (A), en faiſant diſparoitre de deſſous le ſigne $S.$ toutes les différences de z, on

aura, en changeant les fignes, $y\left(Bz - \frac{d.Cz}{dx} + \frac{d^2.Dz}{dx^2} - \&c.\right) + \frac{dy}{dx}\left(Cz - \frac{d.Dz}{dx} + \&c.\right) + \frac{d^2y}{dx^2}(Dz - \&c.) - S.\left(Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \&c.\right)z\,dx =$ conftante; &, en faifant $Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \&c. = o$, & nommant cette equation (D), fi on ordonne l'equation refultante par rapport a z, nous aurons (E) $z\left\{\left(B - \frac{d.C}{dx} + \frac{d^2.D}{dx^2} - \&c.\right)y + \left(C - \frac{d.D}{dx} + \&c.\right)\frac{dy}{dx} + (D - \&c.)\frac{d^2y}{dx^2} + \&c.\right\} - \frac{dz}{dx}\left\{\left(C - \frac{2d.D}{dx} + \&c.\right)y + (D - \&c.)\frac{dy}{dx} + \&c.\right\} + \frac{d^2z}{dx} \times \left\{(D - \&c.)y + \&c.\right\} - \&c. =$ conftante. Il eft clair, par tout ce que nous avons dit dans le Chapitre precedent, que, fi on peut trouver une valeur de y, qui fatisfaffe a l'equation (D) on aura une intégrale de l'equation (B). On auroit donc deux, trois, &c. intégrales de (B), fi on connoiffoit deux, trois, &c. valeurs de y, & en general on auroit l'intégrale finie & algebrique de cette même equation, fi on avoit un nombre de valeurs de y egal a celuy de l'expofant de l'equation (B).

Or la derniere intégrale contiendra autant de constantes arbitraires, qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'equation différentielle (B). Donc si on fait successivement toutes ces constantes, moins une, egale a zero, il est evident par les principes du Chapitre precedent, qu'on aura autant d'intégrales particulieres, & par consequent autant de valeurs de z, qu'il a d'unités dans l'exposant de l'equation (B). Or cette equation est du même ordre que l'equation (A). Donc on trouvera aussi l'intégrale finie & algebrique de (A); c'est a dire, que l'equation $Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \&c. = X$ sera intégrale algebriquement, toutes les fois qu'on aura m valeurs de u dans le cas de $X = o$, m etant l'exposant de l'ordre différentiel de l'equation.

DXLII.

Si on n'avoit que le nombre de valeurs de y exprimé par $m - 1$, c'est a dire, moindre d'une unité que l'exposant de l'ordre différentiel, dans la supposition de $X = o$, on pourroit encore trouver l'intégrale algebrique de l'equation (A). Car dans ce cas on auroit un nombre $m - 1$ d'equations (E), d'où faisant disparoitre les plus hautes différences de z, au nombre de $m - 1$, on arriveroit enfin a une equation, qui ne renferme-

roit plus que des premieres différences, & de la forme $Vz + X' \frac{dz}{dx} = Y$; V, X' & Y etant des fonctions de x. Or l'intégrale de cette equation se trouve aisément par de simples substitutions (Article CCCLXXXII.) lesquels donnent l'intégrale cherchée $z = e^{-S. \frac{V}{X'} dx} \left(\text{Const.} + S. \frac{Y}{X'} e^{S. \frac{V}{X'} dx} dx \right)$.

DXLIII.

REMARQUE. Nous avons deja observé dans le Probleme IV. de ce Chapitre, qu'on peut trouver une infinité d'equations différentielles du premier ordre, intégrables par les methodes precedentes, après les avoir reduites a une equation différentielle du second ordre. On peut même quelquefois intégrer plus aisément par ces mêmes methodes des equations différentielles d'un ordre supérieur, en les différentiant de nouveau dans la supposition de dx constante. Soit, par exemple, l'equation différentielle du second ordre (A), $8dx^2 + 2yddy = dy^2 + 4yydx^2$, elle se reduit, en la différentiant une autre fois, a l'equation très-simple du troisieme ordre $(B)\, d^3y = 4dydx^2$, dont on trouve facilement l'intégrale complette (C) $y = a + be^{2x} + ce^{-2x}$, laquelle

equation (C) renferme non feulement l'intégrale complette de l'equation (B), mais contient de plus, comme un cas particulier, l'intégrale complette de l'equation (A), puifque cette equation (A) eft d'un ordre moins elevé que (B). Il faut par confequent limiter l'equation integrée (C), & en exclure les cas inutiles; ce qu'on fera en différentiant deux fois l'equation (C). Car il faut qu'en fubftituant les valeurs y, dy, ddy trouvées par cette double différentiation, la nouvelle equation fatisfaffe a la propofée (A); ce qu'on obtiendra en comparant les conftantes; ainfi dans le cas prefent on aura $c = \frac{aa-2}{4b}$, & par confequent l'intégrale cherchée fera $y = a + be^{2x} + \frac{aa-2}{4b} e^{-2x}$.

C'eft icy le lieu de rappeller ce que nous avons obfervé (Art. CCCCXXII.) a l'egard des deux différentielles $\alpha ds + \beta du$, & $\rho\alpha du + \rho\beta du + \gamma\beta ds + \mu\alpha ds + du . \varphi(u,s) + ds . \varphi'(u,s)$. Il s'agit de determiner les quantités α, β par les conditions que $\alpha ds + \beta du$, & $\rho\alpha du + \rho\beta du + \gamma\beta ds + \mu\alpha ds + du . \varphi(u,s) + ds . \varphi'(u,s)$ foient l'une & l'autre des différentielles complettes. On fera $\alpha ds + \beta du = dq$, & fubftituant dans la feconde différentielle les valeurs de α & β en q, on aura par le theoreme fondamental du calcul, & par les conditions d'intégrabilité, l'equation fuivante

$\rho \frac{(d^2q)}{ds^2} + \rho \frac{(d^2q)}{dsdu} + \frac{d.\varphi(u,s)}{ds} = \gamma \frac{(d^2q)}{du^2} + \mu \frac{(d^2q)}{duds} + \frac{d.\varphi'(u,s)}{du}$, d'où l'on tire $\gamma \frac{(d^2q)}{du^2} + \mu \frac{(d^2q)}{auds} + \frac{d.\varphi'(u,s)}{du} - \frac{d.\varphi'(u,s)}{ds} = \rho \frac{(d^2q)}{ds^2} + \rho \frac{(d^2q)}{dsdu}$, & par consequent $\frac{(d^2q)}{ds^2} + \frac{(d^2q)}{dsdu} = \frac{\gamma}{\rho} . \frac{(d^2q)}{du^2} + \frac{\mu}{\rho} . \frac{(d^2q)}{ds} + \frac{d.\varphi'(u,s)}{\rho du} - \frac{d.\varphi(u,s)}{\rho ds}$, & en mettant y au lieu de $\frac{d.\varphi'(u,s)}{\rho du} - \frac{d.\varphi(u,s)}{\rho ds}$, c au lieu de $\frac{\gamma}{\rho}$, & b a la place de $\frac{\mu}{\rho}$, on aura $\frac{(d^2q)}{ds^2} + \frac{(d^2q)}{dsdu} = c \frac{(d^2q)}{du^2} + b \frac{(d^2q)}{duds} + y$, ou $\frac{(d^2q)}{ds^2} = c \frac{(d^2q)}{du^2} + b \frac{(d^2q)}{duds} - \frac{(d^2q)}{duds} + y$, qui se reduit a $\frac{(d^2q)}{ds^2} = c . \frac{(d^2q)}{du^2} + g . \frac{(d^2q)}{duds} + y$, en faisant $b - 1 = g$. Enfin, si on fait $\frac{dq}{ds} = z$, on decomposera l'equation dans les deux suivantes $\frac{dq}{ds} = z$, & $\frac{dz}{ds} = g . \frac{dz}{du} + c . \frac{(d^2q)}{du^2} + y$; comme on voit en differentiant, & faisant ds constante. Or ces equations sont comprises dans celles, que nous avons traitées (Article CCCCLXXX.).

CHAPITRE IX.

De la Methode des Variations.

NOus etablirons dans ce Chapitre les principes necessaires pour entendre les nouvelles methodes les plus generales, qu'on a trouvées dans l'analise des infinis, & par lesquelles on a cherché a perfectionner le Calcul Intégral. Nous commençerons par la methode des Variations que M.r Euler a donnée dans le Tome X. des nouveaux Commentaires de l'Academie de Petersbourg, année 1764. Cette methode comprend le Calcul des Variations, & la maniere d'en faire usage dans la solution des Problemes, d'ailleurs très-difficiles.

'est a M.r de la Grange ue nous devons les premiers notions du beau alcul des variations. Il n donna les principes et eaucoup d'applications dans ne memoire imprimée dans e II Vol. des melanges de l'academie de Turin 1762. Les auteurs paroissent ici vouloir attribuer à M.r Euler ette methode, quoique ils en ont transcrits sur entieres plusieurs pages de la memoire e M.r de la Grange. Voyez es pages 174 et suiv. du Vol. cité, et ici dessous les pages 522. et suivants.

ARTICLE PREMIER.

Elemens du Calcul des Variations.

DXLIV.

On suppose d'abord dans ce calcul une equation donnée entre deux variables x & y, que nous designerons par (E), & que nous appellerons l'equation *Principale*, ou *Primitive*. Cette equation exprime une relation

tion donnée entre deux variables, qu'on peut auſſi appeller la relation *Principale*, ou *Primitive* entre x & y. Elle eſt telle, que, quelque valeur determinée qu'on donne a l'une de ces deux variables, la valeur correſpondante de l'autre ſera auſſi determinée par l'equation (E), & que chacune d'elles pourra être regardée comme une fonction de l'autre aſſignable par cette equation. Ainſi lorſque x dans cette equation deviendra $x' = x + dx$, y deviendra $y' = y + dy$, la valeur de y' repondra a celle de x', & la différence de y' d'avec l'y precedent, qui eſt $dy = y' - y$, pourra ſe trouver par les regles ordinaires du calcul différentiel. De même, ſi V eſt une expreſſion compoſée comme on voudra de x, & de y, elle ſera telle, en vertu de la relation donnée entre x & y, ou de l'equation primitive (E), que ſes différentes valeurs reponderont toujours aux valeurs qu'on donnera a x; de ſorte que, ſi V' deſigne la valeur que V acquiert, lorſque x devient $x' = x + dx$, on aura $V' = V + dV$, & $dV = V' - V$, ſuivant les premiers principes du calcul différentiel.

DXLV.

De plus puiſqu'en vertu de l'equation primitive (E) y peut être regardée comme une fonction de x, & qu'en différentiant cette equation, on trouve la relation des différentielles dy & dx, on aura $dy = p\,dx$,

p etant une fonction de x; & par la même raison on aura $dp = q\,dx, dq = r\,dx, dr = s\,dx$, &c., q, r, s, &c. etant toujours des fonctions de x. Nous supposerons toujours dans la suite $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$; $s = \frac{dr}{dx}$; &c., ce qui donne, en traitant dx comme constante, $dp = \frac{ddy}{dx}$; $dq = \frac{ddp}{dx} = \frac{d^3y}{dx^2}$; $dr = \frac{d^4y}{dx^3}$; $ds = \frac{d^5y}{dx^4}$ &c., & $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{ddy}{dx^2}$; $r = \frac{d^3y}{dx^3}$; $s = \frac{d^4y}{dx^4}$; &c.

DXLVI.

Après la premiere supposition d'une relation, ou d'une equation primitive donnée entre x & y, on suppose encore dans le calcul des variations, qu'il arrive un changement quelconque infiniment petit dans cette relation primitive, ou dans l'equation (E) qui l'exprime; de sorte qu'on ait une seconde equation infiniment peu différente de la premiere (E). Nous designerons cette seconde equation par (F), & nous l'appellerons *l'Equation variée*, & la relation entre x & y, qu'elle exprime, *la Relation variée*. On suppose de plus que la variable x demeure la même dans ces deux equations (E) & (F); d'où il suit evidemment que les valeurs de y, qui repondent aux valeurs de x dans la premiere equation (E), ne pourront différer que d'une

quantité infiniment petite des valeurs de y, qui repondent aux mêmes valeurs de x dans la ſeconde equation (F). Nous deſignerons par δy l'accroiſſement infiniment petit, poſitif ou negatif, que y acquiert par le changement de l'equation primitive (E), en l'equation variée (F); de ſorte que, y repondant a x dans la premiere equation, $y + \delta y$ repondra a la même x dans la ſeconde equation, & δy marquera la variation infiniment petite, qui arrive a y par ce changement d'equation ou de relation entre x & y. De même ſuppoſant que y' ſoit la valeur de y, qui repond a $x + dx$ dans l'equation primitive (E), on pourra exprimer par $y' + \delta y'$ ſa valeur qui repond a la même quantité $x + dx$ dans l'equation variée (F); & $\delta y'$ marquera la variation de y', qui nait du changement infiniment petit de l'equation (E) dans l'equation (F). Nous nous ſervons du caractere δ, au lieu de la lettre d, pour diſtinguer les variations δy, $\delta y'$, &c. des différentielles dy, dy', &c.

DXLVII.

COROLLAIRE. Puiſque $y' = y + dy$ on aura $\delta y' = \delta(y + dy) = \delta y + \delta dy$, & $\delta . dy = \delta y' - \delta y$, c'eſt a dire, que la variation de la différentielle dy, qui lui arrive par le changement de l'equation primitive (E) en equation variée (F), eſt egale a la dif-

férence des variations, qui arrivent a y' & a y par le même changement d'equation. Mais comme y' marque l'etat fuivant de y, ou ce que devient y, lorfque x devient $x+dx$ dans la premiere equation (E); de même $\delta y'$ marquera l'etat fuivant de δy, ou ce que devient δy, lorfque x devient $x+dx$, ou que $y+\delta y$ devient $y'+\delta y'$ dans la feconde equation (F); de forte que $\delta y'-\delta y$ exprime la différentielle de δy, comme $y'-y$ exprime la différentielle de y; d'où l'on tire ce principe remarquable; la variation de la différentielle dy eft egale a la différentielle de la variation de y. Car, puifque $\delta dy = \delta y' - \delta y$, & que $\delta y' - \delta y = d.\delta y$; il s'enfuite que $\delta.dy = d.\delta y$.

DXLVIII.

DEFINITION I. V etant une expreffion formée comme on voudra des variables x & y, dont la relation foit exprimée par une equation primitive quelconque (E), la variation de V, que nous defignerons par δV, eft l'accroiffement que cette quantité V acquiert, lorfque la relation primitive entre x & y fubit une variation quelconque infiniment petite, ou lorfque l'equation primitive (E) eft changée en une autre infiniment peu différente (F). Il faut donc bien diftinguer la différentielle dV de la variation δV. Car dV fignifie l'accroiffement de la quantité V, lorfque x de-

vient $x+dx$, la relation primitive entre x & y, ou l'equation (E) qui l'exprime demeurant la même; & δV marque l'accroiſſement de V, lorſque la relation entre x & y, où l'equation (E) varie, & devient (F), la variable x demeurant la même dans ces deux equations.

DXLIX.

Corollaire I. Puiſque par ce changement de relation, ou d'equation entre x & y, la quantité y reçoit l'accroiſſement δy, & devient $y+\delta y$, x demeurant la même; de quelque maniere, que la quantité V ſoit formé de x & de y, on trouvera ſa variation δV, ſi, après avoir ſubſtitué partout $y+\delta y$ au lieu de y dans V ſans rien changer dans x, on ôte V de la valeur, que cette même quantité V acquiert par cette ſubſtitution; car par cette ſubſtitution V deviendra $V+\delta V$, d'où ôtant V, reſte δV.

DL.

Corollaire II. On voit par là, qu'on trouve la variation δV, en différentiant la quantité V dans la ſuppoſition de x conſtante, & en ecrivant enſuite dans la différentielle dV la variation δy au lieu de la différentielle dy. Car pour trouver la différentielle dV en traitant x comme conſtante, on ecrit par tout

$y + dy$ au lieu de y dans la quantité V, qui devient par là V', & on ôte enſuite V de V', pour avoir $V' - V = dV$, ſuivant les premiers principes du Calcul Différentiel.

DLI.

COROLLAIRE III. On peut encore trouver la variation δV, en différentiant d'abord la quantité V a l'ordinaire, c'eſt a dire, en ſuppoſant x & y variables, & en effaçant enſuite dans la différentielle dV, tous les termes où ſe trouve dx; car, ſi on ecrit dans ce qui reſtera de cette différentielle, la variation δy au lieu de dy, on aura δV comme dans le Corollaire precedent.

DLII.

DEFINITION II. Le calcul des variations eſt la methode de trouver les variations qui arrivent a des quantités formées, comme on voudra, de deux variables x & y, lorſque l'equation, ou la relation primitive entre ces deux variables vient a ſubir un changement quelconque infiniment petit; ou bien, ſi V eſt une quantité formée, ou dependante, comme on voudra, des deux variables x & y, dont la relation, ou l'equation primitive eſt ſuppoſée donnée, le calcul des variations eſt la methode qui enſeigne, comment on

peut trouver la variation δV produite par un changement quelconque infiniment petit de cette relation, ou de cette equation primitive.

DLIII.

Corollaire I. Il faut diſtinguer deux etats de la formule, ou fonction V: l'un qu'on peut appeller ſon *etat principal*, & l'autre ſon *etat varié*. Le premier eſt l'etat de V, lorſque les valeurs de y dans V n'ont point encore reçû de variation, ou qu'elles ſont les mêmes que la relation, où l'equation primitive entre les variables x & y l'exige: le ſecond etat de V eſt celui, où les valeurs de y ſe trouvent variées, ou qu'au lieu de y on a ſubſtitué par tout $y + \delta y$ dans V. Comme donc dans l'etat primitif de V, lorſque la variable x augmente de ſa différentielle dx, & devient $x + dx$, y augmente auſſi de ſa différentielle dy, & devient $y + dy$: de même, lorſque la fonction V paſſe de ſon etat primitif a ſon etat varié $V + \delta V$, la valeur de x demeurant la même dans les deux etats, l'autre variable y augmente de ſa variation δy, & devient $y + \delta y$; par où l'on voit, que la variable x, de quelque maniere qu'elle entre dans la formation de la quantité V, ne fait rien pour la variation δV, & que la valeur de cette variation depend uniquement de la variation δy, qu'on conçoit être l'accroiſſement de y,

dans le paſſage de V de ſon etat principal a ſon etat varié; de ſorte qu'on a toujours $\delta x = o$, & que, ſi la quantité V dependoit de la ſeule variable x, & ne comprenoit point l'autre variable y, on auroit $\delta V = o$.

DLIV.

COROLLAIRE II. Puiſque nous ſuppoſons toujours que le changement de la relation, ou de l'equation primitive entre les deux variables x & y, eſt tel qu'on voudra, pourvû qu'il ſoit infiniment petit, les différentes variations, qui arriveront a la variable y, ſuivant les différentes valeurs de x, auxquelles y repond, pourront être telles qu'on voudra, & même independantes les unes des autres. On voit par là, que le calcul des variations eſt très-etendu, & qu'on peut l'adapter a toutes ſortes de conditions données des variations.

DLV.

REMARQUE. Juſqu'icy nous avons expliqué les principes du calcul des variations dans toute leur generalité; peut-être qu'un cas particulier pourra ſervir a les faire comprendre plus facilement. Soit donc $ax = yy$ l'equation primitive, qui exprime la relation donnée entre les deux variables x & y, & que nous avons deſignée par (E). On ſçait que cette equation appartient a une parabole, dont le parametre eſt a, l'abſciſſe

x, &

x, & l'ordonnée correſpondante y; & on voit d'abord que $y = \sqrt{ax}$, fonction de x, & qu'en différentiant, on aura $dy = \frac{a^{\frac{1}{2}}dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$; d'où l'on tire $\frac{dy}{dx} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}} = p$; $dp = -\frac{a^{\frac{1}{2}}dx}{4x^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{dp}{dx} = \frac{-a^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}} = q$; $dq = +\frac{3a^{\frac{1}{2}}dx}{8x^{\frac{5}{2}}}$, $\frac{dq}{dx} = \frac{3a^{\frac{1}{2}}}{8x^{\frac{5}{2}}} = r$; &c.

Suppoſons preſentement qu'on introduiſe un changement infiniment petit dans l'equation primitive $ax = yy$; ce qu'on peut faire d'une infinité de manieres différentes; par exemple, en augmentant le parametre a d'une quantité infiniment petite δa, de ſorte que ce parametre devienne $a + \delta a$, & que ax devienne $(a + \delta a)x$; alors il eſt clair que, pour rendre $yy =$ au produit $(a + \delta a)x$, il faut augmenter auſſi la variable y d'une quantité infiniment petite δy, pour avoir l'equation variée $(a + \delta a)x = (y + \delta y)^2$, qui eſt infiniment peu différente de l'equation primitive $ax = yy$. Cette equation variée appartient a une autre parabole, dont le parametre eſt $a + \delta a$, l'abſciſſe x, la même que dans la premiere parabole, & l'ordon-

née correſpondante $y + \delta y$, qui ne différe de l'ordonnée y, qui repond a l'abſciſſe x dans la premiere parabole, que d'une quantité infiniment petite δy, variation de y. On determinera facilement cette variation δy; car, puiſque $ax = yy$, & $(a + \delta a)x = (y + \delta y)^2 = yy + 2y\delta y + \delta y^2$, ôtant la premiere equation de la ſeconde, il reſtera $x\delta a = 2y\delta y + \delta y^2 = 2y\delta y$, en effaçant le terme δy^2, qui s'evanoüit par rapport au terme $2y\delta y$, comme dans le calcul différentiel, & on aura la variation $\delta y = \frac{x\delta a}{2y} = \frac{x\delta a}{2\sqrt{ax}}$; par où l'on voit qu'il ne faut pas confondre la variation δy avec la différentielle dy, que nous avons trouvée $= \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$.

Soit maintenant V une fonction de x & de y, par exemple $V = ax^2y + bxy^2$, dont on veüille trouver la variation δV, en regardant la variation δy comme donnée. On pourra trouver δV de trois manieres. 1° En ſubſtituant $y + \delta y$ pour y dans la fonction V, qui deviendra par là $ax^2y + ax^2\delta y + bx(y + \delta y)^2$, & en ôtant $ax^2y + bxy^2$ de cette quantité, on aura pour reſte $\delta V = ax^2\delta y + 2bxy\delta y + bx\delta y^2 = ax^2\delta y + 2bxy\delta y$, a cauſe du terme $bx\delta y^2$, qui s'evanoüit par rapport au terme $2bxy\delta y$. 2° En différentiant la fonction V dans la ſuppoſition de dx conſtante, ce

qui donnera $dV = ax^2 dy + 2bxydy$, & en ecrivant enſuite dans cette equation δV pour dV, & δy pour dy. 3° En différentiant a l'ordinaire la fonction V, on aura $dV = ax^2 dy + 2ayxdx + 2bxydy + by^2 dx$, effaçant les deux termes, où ſe trouve dx, & mettant δy pour dy dans ce qui reſte, on aura encore $\delta V = ax^2 \delta y + 2bxy\delta y$. Si on veut ſubſtituer dans cette variation δV la valeur de δy que nous avons trouvée $= \frac{x\delta a}{2y} = \frac{x\delta a}{2\sqrt{ax}}$, on aura $\delta V = \frac{ax^3\delta a}{2y} + bx^2\delta a = \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}\delta a + bx^2\delta a$.

Nous regarderons toujours dans la ſuite la variation δy comme donnée, & nous chercherons, dans cette ſuppoſition, la variation δV de la formule V dependante, comme on voudra, des deux variables x & y, ou de leurs derivées $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$, $s = \frac{dr}{dx}$, &c.

DLVI.

THEOREME I. La variation de dV différentielle de la formule quelconque V, eſt egale a la différentielle de la variation δV de cette formule, ou bien $\delta . dV = d . \delta V$.

DEMONSTRATION. Si on ſubſtitue $x+dx$ pour x, & $y+dy$ pour y dans la quantité V, & que par ces ſubſtitutions V devienne V', on aura $dV=V'-V$ ſuivant les regles du calcul différentiel. Donc $\delta.dV=\delta(V'-V)=\delta V'-\delta V$; or $d.\delta V$ exprime la différence entre δV, & ſa valeur ſuivante $\delta V'$, que δV acquiert, lorſque x devient $x+dx$, & que y devient $y+dy$; enſorte qu'on a $d.\delta V=\delta V'-\delta V$, comme on a trouvé $dV=V'-V$. Donc $\delta.dV=d.\delta V$. *C. Q. F. D.*

DLVII.

COROLLAIRE. En ecrivant dV au lieu de V dans l'equation que nous venons de trouver $\delta.dV=d.\delta V$, on aura $\delta.ddV=d.\delta dV$; or $\delta dV=d.\delta V$; donc $\delta.ddV=dd.\delta V$; par conſequent on aura egalité entre ces trois formes $\delta.ddV=d.\delta dV=dd.\delta V$.

De même ſi on ecrit encore icy dV pour V, on aura egalité entre ces quatre formes $\delta.dddV=d.\delta ddV=dd.\delta dV=ddd.\delta V$, enſuite entre ces cinq formes $\delta.d^4V=d.\delta d^3V=d^2.\delta d^2V=d^3.\delta dV=d^4.\delta V$, & generalement on aura $\delta.d^nV=d^m.\delta d^{n-m}V=d^n.\delta V$; & par là on reduit la variation δd^nV de la différentielle d^nV de l'ordre quelconque n, a la différentielle

du même ordre $d^n . \delta V$ de la variation δV, & en prenant pour m, un nombre qui ne soit pas plus grand que n, on aura aussi $\delta . d^n V = d^m . \delta d^{n-m} V$.

DLVIII.

THEOREME II. En supposant dx constante, & $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$, $s = \frac{dr}{dx}$, &c., on aura les variations suivantes $\delta p = \frac{d . \delta y}{dx}$, $\delta q = \frac{d^2 \delta y}{dx}$, $\delta r = \frac{d^3 \delta y}{dx}$, $\delta s = \frac{d^4 \delta y}{dx}$, &c..

DEMONSTRATION. Puisque dx est constante, & que la variation n'appartient point a la quantité x (Art. DLIII.); a cause de $p = \frac{dy}{dx}$, on aura $\delta p = \frac{\delta . dy}{dx} = \frac{d . \delta y}{dx}$ (Theor. I.). De même, a cause de $q = \frac{dp}{dx}$, on aura $\delta q = \frac{\delta . dp}{dx} = \frac{d . \delta p}{dx} = \frac{d^2 . \delta y}{dx^2}$, en substituant $\frac{d . \delta y}{dx}$ pour δp. a cause de $r = \frac{dq}{dx}$, on aura $\delta r = \frac{\delta . dq}{dx} = \frac{d . \delta q}{dx} = \frac{d .^3 \delta y}{dx^3}$, en substituant $\frac{d^2 . \delta y}{dx^2}$ pour dq. On trouvera de même $\delta s = \frac{\delta . dr}{dx} = \frac{d . \delta r}{dx} = \frac{d^4 \delta y}{dx^4}$, & ainsi de suite a l'infini. C. Q. F. D.

DLIX.

COROLLAIRE I. Ces différentielles du premier degré, & des autres degrés supérieurs de la variation δy, sont determinées par les variations des valeurs de y, qui repondent aux valeurs suivantes de x, c'est a dire, aux valeurs $x+dx$, $x+2dx$, $x+3dx$, &c. Car si les valeurs suivantes de y, c'est a dire, celles qui repondent aux valeurs $x+dx$, $x+2dx$, $x+3dx$, &c. sont designées par y', y'', y''', y'''', &c., & leurs variations par $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$, $\delta y''''$, &c. on aura par la nature des différentielles $d.\delta y = \delta y' - \delta y$; $d.\delta y' = \delta y'' - \delta y'$; $d.\delta y'' = \delta y''' - \delta y''$; &c.

$$dd.\delta y = d(\delta y' - \delta y) = d.\delta y' - d.\delta y = \delta y'' - \delta y' - \delta y' + \delta y = \delta y'' - 2\delta y' + \delta y.$$

$$d^3 \delta y = d(dy'' - 2\delta y' + \delta y) = d.\delta y'' - 2d.\delta y' + d.\delta y = \delta y''' - \delta y'' - 2\delta y'' + 2\delta y' + \delta y' - \delta y = \delta y''' - 3\delta y'' + 3\delta y' - \delta y;\ \&c.$$

DLX.

COROLLAIRE II. Donc si la valeur y, qui repond a x, reçoit la variation δy, & que les valeurs suivantes, y', y'', y''', &c. ne reçoivent aucune variation, ensorte qu'on ait $\delta y' = o$, $\delta y'' = o$, $\delta y''' = o$, &c., on aura $d.\delta y = -\delta y$; $dd.\delta y = +\delta y$; $d^3 \delta y = -\delta y$; $d^4 . \delta y = +\delta y$; &c.

DLXI.

THEOREME III. La variation de la formule intégrale quelconque $S.Zdx$ eſt egale a l'intégrale de la variation de la différentielle Zdx; ou $\delta S.Zdx = S.\delta.Zdx$, en ſuppoſant que Z eſt une quantité formée, ou dependante, comme on voudra, des deux variables x & y.

DEMONSTRATION. Soit $V = S.Zdx$, on aura, en différentiant, $dV = Zdx$; par conſequent $\delta dV = \delta.Zdz$. Or $\delta dV = d.\delta V$ (Theor. I.); donc $d.\delta V = \delta Zdx$; &, en intégrant de part & d'autre, $\delta V = S.\delta Zdx$, ou $\delta.S.Zdx = S.\delta Zdx$. *C. Q. F. D.*

DLXII.

PROBLEME I. Trouver la variation δV de la formule V, lorſqu'elle ne renferme que les deux variables finies x & y.

SOLUTION. 1.° Prenez la différentielle de la fonction V a l'ordinaire, c'eſt a dire, en faiſant varier x & y; & cette différentielle ſera $dV = Mdx + Ndy$, M & N etant des fonctions de x & de y, ou des fonctions de x, en regardant y comme une fonction de x, en vertu de l'equation primitive.

2.° Ecrivez dans cette différentielle zero pour dx, & la variation δy pour la différentielle dy, & vous aurez $\delta V = N\delta y$ (Art. DLI.). *C. Q. F. T. & D.*

DLXIII.

PROBLEME II. Trouver la variation δV de la formule V, lorſqu'outre les deux variables finies x & y, elle renferme encore leurs différentielles de quelqu'ordre que ce ſoit, ou les rapports de ces différentielles exprimés par $p=\frac{dy}{dx}$, $q=\frac{dp}{dx}$, $r=\frac{dq}{dx}$, $s=\frac{dr}{dx}$, &c., ou bien, ce qui revient au même, lorſque V eſt une fonction quelconque des quantités x, y, & de leurs derivées p, q, r, s, &c.

SOLUTION. 1° Prenez la différentielle de la fonction V par les regles ordinaires du calcul différentiel; & vous aurez $dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \&c.$, M, N, P, Q, R, S, &c. etant des fonctions des quantités x, y, p, q, r, s, &c., fonctions qu'on trouve par cette différentiation, & qu'on peut auſſi regarder comme des fonctions de x, ou de y en vertu de l'equation primitive entre x & y, & des autres equations $p=\frac{dy}{dx}$, $q=\frac{dp}{dx}$, $r=\frac{dq}{dx}$, &c.

2° Ecrivez dans cette différentielle zero pour dx, & les variations δV, δy, δp, δq, δr, &c. pour les différentielles dV, dy, dp, dq, dr, &c., & vous aurez la variation $\delta V = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + \&c.$

3°

3.° Substituez encore dans cette equation les valeurs des variations δp, δq, δr, δs, &c. qu'on a trouvées cy-dessus (Art. DLVIII.) en supposant dx constante; & la variation cherchée sera $\delta V = N\delta y + \frac{Pd\delta y}{dx} + \frac{Qdd.\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3\delta y}{dx^3} + \frac{Sd^4\delta y}{dx^4} +$ &c.

DEMONSTRATION. La différentielle $dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq +$ &c. n'est autre chose que l'accroissement que la fonction V acquiert, lorsqu'elle devient V', ou lorsqu'on substitue dans cette fonction $x + dx$, $y + dy$, $p + dp$, $q + dq$, $r + dr$, &c. pour x, y, p, q, r, &c., substitution qui change V en V', de sorte qu'en retranchant V de V', on a $dV = V' - V = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq +$ &c. suivant les regles generales du calcul différentiel.

Or la variation δV n'est aussi rien autre chose, que l'accroissement que la même formule V acquiert en passant de son etat primitif a son etat varié, qu'on trouve, en substituant dans cette formule $x + o$, $y + \delta y$, $p + \delta p$, $q + \delta q$, $r + \delta r$, &c. pour x, y, p, q, r, &c., substitution qui donne a V son etat varié $V + \delta V$, de sorte qu'en retranchant V de $V + \delta V$, il reste δV, qu'on trouve en ecrivant dans la différentielle $Mdx + Ndy + Pdp + Qdq +$ &c. les variations zero pour dx, δy pour dy, δp pour dp, δq pour dq, &c. (Art. DLI.), on aura donc $\delta V = N\delta y$

$+P\delta p+Q\delta q+R\delta r+$ &c., & (par l'Art. DLVIII.) $\delta V=N\delta y+\frac{Pd.\delta y}{dx}+\frac{Qd^2\delta y}{dx^2}+$ &c. *C. Q. F. D.*

DLXIV.

PROBLEME III. Trouver la valeur $\delta S.Zdx$ de la formule intégrale $S.Zdx$, dans laquelle Z eſt une fonction quelconque des deux variables x, y, & de leurs derivées p, q, r, s, &c., en ſuppoſant toujours $p=\frac{dy}{dx}$, $q=\frac{dp}{dx}$, $r=\frac{dq}{dx}$, $s=\frac{dr}{dx}$, &c.

SOLUTION. Puiſque la variation $\delta S.Zdx$ eſt (Theor. III.) egale a $S.\delta Zdx$, il ne s'agit que de trouver la variation δZdx, & d'en prendre enſuite l'intégrale ; on cherchera donc d'abord, comme dans le Probleme precedent, la différentielle $dZ=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr+Sds+$ &c., par la quelle on determinera les valeurs des coefficients $M, N, P, Q, R,$ &c., & on en deduira la variation $\delta Z=N\delta y+\frac{Pd\delta y}{dx}+\frac{Qdd.\delta y}{dx^2}+\frac{Rd^3\delta y}{dx^3}+\frac{Sd^4\delta y}{dx^4}+$ &c. ; en multipliant par dx, & en intégrant enſuite de coté & d'autre, on aura $S.\delta Zdx=S.N\delta ydx+S.Pd.\delta y+S.\frac{Qdd\delta y}{dx}+S.\frac{Rd^3\delta y}{dx^2}+S.\frac{Sd^4\delta y}{dx^3}+$ &c. Or ſi on ſe rappelle que, π & τ etant deux variables quelconques, l'intégrale $S.\pi d\tau=\pi\tau-S.\tau d\pi$, & qu'on conſidere

δy comme une ſimple variable, que nous deſignerons par ω, pour eviter la confuſion, on comprendra facilement les reductions ſuivantes

$$S.\, N\delta y\, dx = S.\, \delta y\, dx.\, N\,;\quad S.\, P d.\, \delta y = S.\, P d\omega = P\omega$$
$$- S.\, \omega dP = \delta y.\, P - S.\, \delta y\, dx.\, \frac{dP}{dx}\,;$$

$$S.\, \frac{Qdd.\,\delta y}{dx} = S.\, \frac{Qdd\omega}{dx} = \frac{Qd\omega}{dx} - S.\, \frac{dQ}{dx} d\omega = \frac{Qd\omega}{dx} -$$
$$\frac{\omega dQ}{dx} + S.\, \frac{\omega ddQ}{dx} = d.\, \delta y \frac{Q}{dx} - \delta y.\, \frac{dQ}{dx} +$$
$$S.\, \delta y\, dx.\, \frac{ddQ}{dx^2}\,;$$

$$S.\, \frac{Rd^3\delta y}{dx^2} = S.\, \frac{Rd^3\omega}{dx^2} = \frac{Rdd\omega}{dx^2} - \frac{dRd\omega}{dx^2} + \frac{\omega ddR}{dx^2} -$$
$$S.\, \frac{\omega d^3 R}{dx^2} = \frac{dd.\,\delta y}{dx^2} \cdot R - \frac{d.\,\delta y}{dx} \cdot \frac{dR}{dx} +$$
$$\delta y \cdot \frac{ddR}{dx^2} - S.\, \delta y\, dx \cdot \frac{d^3 R}{dx^3}\,;$$

$$S.\, \frac{S.\, d^4\delta y}{dx^3} = S.\, \frac{S.\, d^4\omega}{dx^3} = \&c.$$

En faiſant la ſomme de toutes ces valeurs, & joignant enſemble les termes des intégrales, qui ſe repondent, on aura

$$S.\delta Z dx = S.\delta y dx . N - S.\delta y dx . \frac{dP}{dx} + S.\delta y dx . \frac{ddQ}{dx^2} - S.\delta y dx . \frac{d^3R}{dx^3} + \&c.$$
$$+ \delta y . P - \delta y . \frac{dQ}{dx} + dy . \frac{ddR}{dx^2} - \delta y . \frac{d^3S}{dx^3} + \&c.$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx} Q - \frac{d\delta y}{dx} . \frac{dR}{dx} + \frac{d\delta y}{dx} . \frac{ddS}{dx^2} - \frac{d\delta y}{dx} . \frac{d^3T}{dx^3} + \&c.$$
$$+ \frac{dd.\delta y}{dx^2} . R - \frac{dd.\delta y}{dx^2} . \frac{dS}{dx} + \frac{dd.\delta y}{dx^2} . \frac{ddT}{dx^2} - \&c.$$
$$+ \frac{d^3\delta y}{dx^3} . S - \frac{d^3\delta y}{dx^3} . \frac{dT}{dx} + \&c.$$
$$+ \frac{d^4\delta y}{dx^4} . T - \&c.$$
$$+ \&c.$$

ou
$$\delta . S . Z dx = S.\delta y dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \&c. \right)$$
$$+ \delta y \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \&c. \right)$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \&c. \right)$$
$$+ \frac{dd.\delta y}{dx^2} \left(R - \frac{dS}{dx} + \&c. \right)$$
$$+ \frac{d^3\delta y}{dx^3} (S - \&c.)$$
$$\&c.$$

On a donc la valeur de la variation $\delta Z dx$ dans la ſuppoſition de dx conſtante. *C. Q. F. T.*

DLXV.

COROLLAIRE I. La valeur de la variation $\delta S.Zdx$ eſt compoſée de la partie intégrale $S.\delta y dx \times \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \&c.\right)$, & d'autres parties *abſolues*, ou ſans intégrale, dans leſquelles ſe trouvent la variation ſimple δy, & ſes différentielles $d.\delta y$, $dd.\delta y$, $d^3.\delta y$, &c.

DLXVI.

COROLLAIRE II. On a diſpoſé par les réductions la partie intégrale, de maniere qu'elle ne contient que la ſimple variation δy, & qu'elle ne renferme aucune de ſes différentielles. On verra dans la ſuite que cette forme eſt très-utile dans l'application du calcul des variations.

DLXVII.

REMARQUE. On peut toujours conſiderer l'intégrale $S.Zdx$, comme l'aire d'une courbe, dont l'abſciſſe eſt x, & l'ordonnée perpendiculaire Z; & ſi on ſuppoſe que, l'abſciſſe x demeurant la même, l'ordonnée Z augmente de ſa variation δZ, on aura une autre courbe, dont l'aire ſera $S.(Z + \delta Z)dx = S.Zdx + S.\delta Zdx$, de ſorte que l'intégrale $S.\delta Zdx$ ſera l'ac-

croiſſement infiniment petit, ou la variation de l'aire $S.Zdx$, lorſque l'ordonnée Z devient partout $Z+\delta Z$; & comme, pour avoir les aires de ces deux courbes, qui repondent a l'abſciſſe x depuis ſon commençement, juſqu'a ce qu'elle ait une valeur determinée a ou depuis $x=o$, juſqu'a $x=a$, il faut prendre les intégrales $S.Zdx$, & $S.(Z+\delta Z)dx$, de maniere qu'elles s'evanoüiſſent par la ſubſtitution de zero au lieu de x, & trouver enſuite les valeurs qu'elles acquierent par la ſubſtitution de a pour x; de même, pour trouver la variation de l'intégrale $S.Zdx$ depuis $x=o$, juſqu'a $x=a$, il faut prendre l'intégrale $S.\delta ydx\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\&c.\right)$ de maniere qu'elle s'evanoüiſſe par la ſubſtitution de zero au lieu de x, & trouver enſuite la valeur qu'elle acquiert par la ſubſtitution de a pour x; aprés quoy on trouvera facilement les valeurs des autres parties abſolues de la variation en y ſubſtituant zero au lieu de x, & enſuite a pour x; car comme ces autres parties ne renferment point d'intégrations a faire, on peut faire ces ſubſtitutions immediatement.

DLXVIII.

PROBLEME IV. Trouver la variation $\delta S.Zdx$ de la formule intégrale $S.Zdx$, lorſque la quantité Z contient non ſeulement les variables x, y, & leurs de-

rivées p, q, r, s, &c., mais de plus une formule intégrale $\Pi = S. Z' dx$, dans laquelle Z' est une fonction quelconque des quantités x, y, p, q, r, s, &c.

SOLUTION. Puisque la quantité Z contient les variables x, y, p, q, r, &c., & de plus l'intégrale $\Pi = S. Z' dx$, on peut la regarder comme une fonction des quantités Π, x, y, p, q, r, s, &c. ainsi la différentielle prise a l'ordinaire sera $dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds +$ &c., par laquelle on determinera les valeurs des coefficients L, M, N, P, Q, &c., & on en deduira la variation suivante $\delta Z = L d\Pi + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + S \delta s +$ &c. de même, puisque Z' est une fonction de x, y, p, q, r, s, &c., on trouvera sa différentielle $dZ' = M dx + N dy + P' dp + Q' dq + R' dr + S' ds +$ &c., par laquelle on determinera les valeurs des coefficients M', N', P', Q', R', &c., & on en deduira la variation $\delta Z' = N' \delta y + P' \delta p + Q' \; q + R' \delta r + S' \delta s +$ &c., & par le Probleme precedent on aura $\delta \Pi = \delta S. Z' dx = S. N' \delta y dx + S. P' d. \delta y + S. \frac{Q' dd. \delta y}{dx} + S. \frac{R' d^2 \delta y}{dx^2} +$ &c.; substituant cette valeur de $\delta \Pi$ dans l'equation $\delta Z = L \delta \Pi + N \delta y + P \delta p + Q \delta q +$ &c., & mettant pour δp, δq, δr, &c. leurs valeurs, on aura

$$\delta Z = LS.N'\delta y\,dx + LS.P'd.\delta y + L\frac{S.Q'dd\delta y}{dx} + \frac{S.R'd.^3\delta y}{dx^2} + \&c.$$

$$+ N\delta y + \frac{Pd.\delta y}{dx} + \frac{Qdd.\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3.\delta y}{dx^3} + \&c.$$

Puis donc que $\delta S.Z\,dx = S.\delta Z\,dx$, on aura la variation cherché

$$\delta S.Z\,dx = S.(Ldx\,S.N'\delta y\,dx) + S.(Ldx\,S.P'd.\delta y) + S.\left(Ldx.S.\frac{Q'dd\delta y}{dx}\right) + \&c.$$

$$+ S.N\delta y\,dx + S.Pd.\delta y + S.\frac{Qdd.\delta y}{dx} + S.\frac{Rd^3.\delta y}{dx^2} + \&c.$$

Pour delivrer cette formule des ſignes multipliés d'intégration, ſuppoſons $S.Ldx = V$, ou $Ldx = dV$; &, par ce qu'on a les egalités ſuivantes $S.(Ldx\,S.N'\delta y\,dx) = S.(dV S.N'\delta y\,dx) = VS.N'\delta y\,dx - S.VN'\delta y\,dx$; $S.(Ldx\,S.P'd\delta y) = S.(dV S.P'd\delta y) = S.VS.P'd\delta y - S.VP'd\delta y$; $S.\left(Ldx\,S.\frac{Q'dd.\delta y}{dx}\right) = S.\left(dV S.\frac{Q'dd\delta y}{dx}\right) = VS.\frac{Q'dd\delta y}{dx} - S.\frac{VQ'dd\delta y}{dx}$, on trouvera

$$\delta S.Z\,dx = VS.N'\delta y\,dx + VS.P'd\delta y + VS.\frac{Q'dd\delta y}{dx} + VS.\frac{R'd^3\delta y}{dx^2} + \&c.$$

$$+ S.(N - N'V)\delta y\,dx + S.(P - P'V)d\delta y + S.(Q - Q'V)\frac{dd.\delta y}{dx} + \&c.$$

Ces deux formules etant reduites, comme dans le Probleme precedent donneront la variation cherchée

$$\delta S.Z\,dx = VS.\delta y\,dx\left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \frac{d^4S'}{dx^4} - \&c.\right)$$
$$+ \quad V\delta y\left(P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{ddR'}{dx^2} - \frac{d^3S'}{dx^3} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{Vd\delta y}{dx}\left(Q' - \frac{dR'}{dx} + \frac{ddS'}{dx^2} - \&c.\right)$$
$$+ \frac{Vdd\delta y}{dx^2}\left(R' - \frac{dS'}{dx} + \&c.\right)$$
$$\&c.$$
$$+ S.\delta y\,dx\left\{(N - N'V) - \frac{d(P - P'V)}{dx} + \frac{dd(Q - Q'V)}{dx^2} - \frac{d^3(R - R'V)}{dx^3} + \&c.\right\}$$
$$+ \delta y\left\{(P - P'V) - \frac{d(Q - Q'V)}{dx} + \frac{dd(R - R'V)}{dx^2} - \&c.\right\}.$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx}\left\{(Q - Q'V) - \frac{d(R - R'V)}{dx} + \&c.\right\}$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2}\left\{(R - R'V) - \&c.\right\}$$
$$\&c.$$

DLXIX.

Corollaire I. Les reductions, dont nous nous sommes servis, pouvant se trouver aisément, on peut les ômettre pour exprimer d'une maniere plus courte la variation

$$\delta S.Z\,dx = VS.dx\left(N'\delta y + \frac{P'd\delta y}{dx} + \frac{Q'dd\delta y}{dx^2} + \frac{R'd^3\delta y}{dx^3} + \&c.\right)$$
$$+ S.dx\left\{(N - N'V)\delta y + (P - P'V)\frac{d\delta y}{dx} + (Q - Q'V)\frac{dd\delta y}{dx^2} + \&c.\right\};$$

Car il eſt evident que $VS.N'\delta y\,dx + VS.P'd\delta y + VS.\frac{Q'dd\delta y}{dx} + \&c. = VS.dx\left(N'\delta y + \frac{P'd\delta y}{dx} + \frac{Q'dd\delta y}{dx^2}\right.$ $\left. + \&c.\right)$, & que $S.(N - N'V)\,\delta y\,dx + S.(P - P'V) \times d\delta y + S.(Q - Q'V)\frac{dd\delta y}{dx} + \&c. = S.dx\{(N - N'V) \times \delta y + (P - P'V)\frac{d\delta y}{dx} + (Q - Q'V)\frac{dd\delta y}{dx^2} + \&c.\}$.

DLXX.

COROLLAIRE II. Lorſqu'on veut avoir la variation $\delta S.Z\,dx$, depuis $x = o$, juſqu'a $x = a$, on prendra l'intégrale $S.L\,dx = V$, de maniere qu'elle s'evanoüiſſe par la ſubſtitution de zero au lieu de x, & qu'enſuite cette intégrale V devienne A par la ſubſtitution de a pour x, & on pourra ecrire A pour V dans la formule qui exprime la variation $\delta S.Z\,dx$, lorſque la lettre V dans cette formule eſt hors du ſigne d'intégration S.

DLXXI.

COROLLAIRE III. Et par ce que les coefficients L, M, N, P, Q, &c. peuvent être regardés comme des fonctions de x, a cauſe qu'on ſuppoſe que la relation, ou l'equation primitive entre x & y eſt donnée; l'intégrale $S.L\,dx$, ou V pourra être traitée comme

une quantité constante A, après qu'on aura substitué dans V la constante a pour la variable x, de sorte que l'intégrale $VS.\delta y\,dx\left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \right.$ $\left.\&c.\right)$ deviendra $AS.\delta y\,dx\left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \&c.\right)$ $= S.\delta y\,dx\left(N'A - \frac{dP'}{dx}A + \frac{ddQ'}{dx^2}A - \&c.\right)$; & qu'en ajoutant cette intégrale avec sa correspondante $S.\delta y\,dx\left\{(N - N'V) - \frac{d.(P - P'V)}{dx} + \frac{dd(Q - Q'V)}{dx^2}\right.$ $\left.- \&c.\right\}$, la somme sera $S.\delta y\,dx\left\{(N + N'A - N'V)\right.$ $\left.- \frac{d(P + P'A - P'V)}{dx} + \frac{dd(Q + Q'A - Q'V)}{dx^2} - \&c.\right\}$.

De même, si on ajoute la partie absolue $V\delta y \times$ $\left(P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{ddR'}{dx^2} - \&c.\right)$, ou $\delta y\left(P'A - \frac{dQ'}{dx}A + \right.$ $\left.\frac{ddR'}{dx^2}A + \&c.\right)$ avec sa correspondante $\delta y\left\{(P - P'V) - \right.$ $\left.\frac{d.(Q - Q'V)}{dx} + \frac{dd.(R - RV)}{dx^2} - \&c.\right\}$; leur somme sera $\delta y\left\{(P + P'A - P'V) - \frac{d.(Q + Q'A - Q'V)}{dx} + \right.$ $\left.\frac{dd.(R + R'A - R'V)}{dx^2} - \&c.\right\}$. Enfin si on suppose, pour abreger, $N + (A - V)N' = (N)$; $P + (A - V)P'$ $= (P)$; $Q + (A - V)Q = (Q)$; $R + (A - V)R =$ (R); &c., on aura pour la variation $\delta S.Z\,dx$ prise jusqu'a $x = a$, la formule suivante

$$\delta S.Z\,dx = S.\delta y\,dx \left\{ (N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd.(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^4} - \&c. \right\}$$

$$+ \delta y \left\{ (P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd.(R)}{dx^2} - \frac{d^3(S)}{dx^3} + \&c. \right\}$$

$$+ \frac{d.\delta y}{dx} \left\{ (Q) - \frac{d.(R)}{dx} + \frac{dd.(S)}{dx^2} - \&c. \right\}$$

$$+ \frac{dd.\delta y}{dx^2} \left\{ (R) - \frac{d.(S)}{dx} + \&c. \right\}$$

$$+ \frac{d^3\delta y}{dx^3} \left\{ (S) - \&c. \right\}$$

$$+ \&c.$$

On trouvera la même chofe en faifant dans la formule du Corollaire I. les reductions, dont on s'eft fervi dans les Problemes precedents.

DLXXII.

COROLLAIRE IV. Si la quantité Z de la formule propofée $S.Z\,dx$ renferme de plus une autre formule intégrale $\Pi' = S.Z'dx$, de forte qu'on ait $dZ = Ld\Pi + L'd\Pi' + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr$, & auffi $dZ'' = M''dx + N''dy + P''dp + Q''dq + R''dr +$ &c. Si on fuppofe $S.L\,dx = V$, $S.L'dx = V'$, & de plus, pour abreger, $N - N'V - N''V' = (N)$; $P - P'V - P''V' = (P)$; $Q - Q'V - Q''V' = (Q)$; $R - R'V - R''V' = (R)$, on trouvera la variation

$$\delta S.Zdx = VS.dx\left(N'\delta y + \frac{P'd.\delta y}{dx} + \frac{Q'dd.\delta y}{dx^2} + \frac{R'd^3\delta y}{dx^3} + \&c.\right)$$

$$+ V'S.dx\left(N''\delta y + \frac{P''d.\delta y}{dx} + \frac{Q''dd.\delta y}{dx^2} + \frac{R''d^3\delta y}{dx^3} + \&c.\right)$$

$$+ S.dx\left\{(N)\delta y + (P)\frac{d.\delta y}{dx} + (Q)\frac{dd.\delta y}{dx^2} + (R)\frac{d^3.\delta y}{dx^3} + \&c.\right\}$$

Mais si on veut avoir cette variation jusqu'à $x = a$, on supposera qu'ayant substitué a pour x, l'intégrale V devienne A, & l'intégrale $V' = A'$, & ayant fait

$$(N) = N + (A - V)N' + (A' - V')N'';$$
$$(P) = P + (A - V)P' + (A' - V')P'';$$
$$(Q) = Q + (A - V)Q' + (A' - V')Q'';$$
$$(R) = R + (A - V)R' + (A' - V')R''; \&c.$$

On trouvera la variation cherchée

$$\delta S.Zdx = S.dx\,\delta y\left\{(N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \&c.\right\}$$

$$+ \delta y\left\{(P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} + \&c.\right\}$$

$$+ \frac{d.\delta y}{dx}\left\{(Q) - \frac{d(R)}{dx} + \&c.\right\}$$

$$+ \frac{dd.\delta y}{dx^2}\left\{(R) - \&c.\right\}$$

$$+ \&c.$$

DLXXIII.

PROBLEME V. Trouver la variation $\delta S.Z dx$ de la formule intégrale $S.Z dx$, lorsque la quantité Z, outre les lettres x, y, p, q, r, &c., renferme la formule intégrale $\Pi = S.Z' dx$, dans laquelle la quantité Z', outre les lettres x, y, p, q, r, &c., contient la formule intégrale $\Pi' = S.Z'' dx$, Z'' etant une fonction des seules variables x, y, p, q, r, &c.

SOLUTION. 1.° Puisque Z est une fonction des quantités x, y, p, q, r, &c., & de $\Pi = S.Z' dx$, sa différentielle sera $L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr +$ &c., & sa variation $\delta Z = L \delta \Pi + N \delta y + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{dd.\delta y}{dx^2} + R \frac{d^3 \delta y}{dx^3} +$ &c., ou $\delta Z = L \delta \Pi + H$, en supposant $H = N \delta y + \frac{P d.\delta y}{dx} + \frac{Q dd.\delta y}{dx^2} +$ &c.; donc $\delta Z dx = L dx \delta \Pi + H dx$, & $\delta S.Z dx = S.\delta Z dx = S.L dx \delta \Pi + S.H dx$.

2.° Puisque Z' est une fonction des quantités Π', x, y, p, q, r, &c., on aura $dZ' = L' d\Pi' + M' dx + N' dy + P' dp + Q' dq + R' dr +$ &c. ; $\delta Z' = L' \delta \Pi' + N' \delta y + \frac{P' d.\delta y}{dx} + \frac{Q' dd.\delta y}{dx^2} + \frac{R d^3 \delta y}{dx^3} +$ &c. ; $\delta Z' = L' \delta \Pi' + H'$, en supposant $H' = N' \delta y + \frac{P' d.\delta y}{dx}$

$+\frac{Q'dd.\delta y}{dx^2}+$ &c. ; $\delta Z'dx = L'dx d\Pi' + H'dx$;
$S.\delta Z'dx = S.L'dx\delta\Pi' + S.H'dx$. Donc, puiſque $\Pi = S.Z'dx$, $\delta\Pi = \delta S.Z'dx = S.L'dx\delta\Pi' + S.H'dx$. Mais on vient de trouver cy-deſſus $\delta S.Zdx = S.Ldx\delta\Pi + S.Hdx$; donc, en ſubſtituant pour $\delta\Pi$ ſa valeur, on aura la variation cherchée $\delta S.Zdx = S.Ldx.S.L'dx\delta\Pi' + S.L'dx.S.H'dx + S.Hdx$.

3º Puiſque Z'' eſt une fonction des ſeules quantités x, y, p, q, r, &c., on aura $dZ'' = M''dx + N''dy + P''dp + Q''dq + R''dr +$ &c.; $\delta Z'' = N''\delta y + \frac{P''d\delta y}{dx} + \frac{Q''dd.\delta y}{dx^2} + \frac{R''d^3\delta y}{dx^3} +$ &c. ; $\delta Z'' = H''$, en ſuppoſant $H'' = N''\delta y + \frac{P''d.\delta y}{dx} + \frac{Q''dd.\delta y}{dx^2} +$ &c. ; $\delta Z''dx = H''dx$; $S.\delta Z''dx = S.H''dx$; &, par ce que $\Pi' = S.Z''dx$, on aura $\delta\Pi' = \delta S.Z''dx = S.\delta Z''dx = S.H''dx$.

Subſtituant cette valeur de $\delta\Pi'$ dans l'equation $\delta S.Zdx = S.Ldx.S.L'dx\delta\Pi' + S.L'dx.S.H'dx + S.Hdx$, qu'on a trouvé cy-deſſus, on aura la variation cherchée $\delta S.Zdx = S.Ldx.S.L'dx.S.H''dx + S.L'dx.S.H'dx + S.Hdx$.

4º Maintenant pour delivrer cette formule des ſignes multipliés d'intégration, ſuppoſons d'abord $S.Ldx = V$, ou $Ldx = dV$, & nous aurons $S.Ldx.S.H''dx = S.dV.S.H''dx = VS.H''dx - S.VH''dx$, & $S.Ldx.\times$

$S.L'dx.S.H''dx = VS.L'dx.S.H''dx - S.VL'dx.S.H''dx$; donc $\delta S.Zdx = VS.L'dx.S.H''dx - S.VL'dxS.H''dx + S.L'dx.S.H'dx + S.Hdx$.

5° Suppofant encore $S.L'dx = V'$, ou $L'dx = dV'$, on aura $S.L'dx.S.H''dx = S.dV'.S.H''dx = V'S.H''dx - S.V'H''dx$, & $VS.L'dx.S.H''dx = VV'.\times S.H''dx - VS.V'H''dx$; donc $\delta S.Zdx = VV'S.H''dx - VS.V'H''dx - S.VdV'.S.H''dx + VS.H'dx + S.Hdx$.

6° Suppofant enfin $VdV' = dV''$, ou $S.VdV' = V''$, on aura $S.VdV'S.H''dx = S.dV''.S.H''dx = V''S.H''dx - S.V''H''dx$; & en fubftituant cette valeur dans la derniere equation, on aura la variation cherchée $\delta S.Zdx = VV'.S.H''dx - VS.V'H''dx - V''S.H''dx + S.V''H''dx + VS.H'dx + S.Hdx$, ou $\delta S.Zdx = (VV' - V'')S.H''dx - V.S.V'H''dx + S.V''H''dx + VS.H'dx + S.Hdx$. En remettant dans cette formule les valeurs de H'', H', & H, on aura

$$\delta S.Zdx = (VV' - V'').S.dx\left(N''\delta y + \frac{P''d.\delta y}{dx} + \frac{Q''dd.\delta y}{dx^2} + \&c.\right)$$
$$- V.S.V'dx\left(N''\delta y + \frac{P''d.\delta y}{dx} + \frac{Q''dd.\delta y}{dx^2} + \&c.\right)$$
$$+ S.V''dx\left(N''\delta y + \frac{P''d.\delta y}{dx} + \frac{Q''dd.\delta y}{dx^2} + \&c.\right)$$
$$+ VS.dx\left(N'\delta y + \frac{P'd.\delta y}{dx} + \frac{Q'dd.\delta y}{dx^2} + \&c.\right)$$
$$+ S.dx\left(N\delta y + \frac{Pd.\delta y}{dx} + \frac{Qdd.\delta y}{dx^2} + \&c.\right)$$

DLXXIV.

DLXXIV.

Corollaire I. Si on veut avoir la variation de la formule intégrale $S.Zdx$ depuis $x=o$, jusqu'a $x=a$, on prendra les intégrales $V=S.Ldx$, $V'=S.L'dx$, & $V''=S.L''dx$, de maniere qu'elles s'evanoüiffent en faifant $x=o$, & qu'en fuppofant enfuite $x=a$, elles deviennent $V=A$, $V'=A'$, $V''=A''$, & on pourra mettre ces valeurs A, A', A'' pour V, V', V'', dans la formule de la variation que nous avons trouvée, lorfque les lettres V, V', V'' font hors du figne d'intégration S.

DLXXV.

Corollaire II. Si on fuppofe, pour abreger,

$$N+(A-V)N'+(AA'-A''-AV'+V'')N''=(N);$$
$$P+(A-V)P'+(AA'-A''-AV'+V'')P''=(P);$$
$$Q+(A-V)Q'+(AA'-A''-AV'+V'')Q''=(Q);$$
$$R+(A-V)R'+(AA'-A''-AV'+V'')R''=(R);$$

&c.

La variation de la formule $S.Zdx$ jufqu'a $x=a$, fera

$$S.dx\left\{(N)d\delta y+(P)\frac{d.\delta y}{dx}+(Q)\frac{dd.\delta y}{dx^2}+(R)\frac{d^3y}{dx^3}+\&c.\right\}$$

DLXXVI.

COROLLAIRE III. Si on fait les reductions comme dans les Problemes precedents, on trouvera pour la variation cherchée jusqu'a $x = a$

$$\delta S. Z dx = S. dx \delta y \left\{ (N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \&c. \right\}$$
$$+ \delta y \left\{ (P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \&c. \right\}$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx} \left\{ (Q) - \frac{d(R)}{dx} + \&c. \right\}$$
$$+ \frac{dd.\delta y}{dx^2} \left\{ (R) - \&c. \right\}$$
$$\&c.$$

DLXXVII.

COROLLAIRE IV. Puisque $V'' = S. V dV'$, on aura $AV' - V'' = S.(A - V) L' dx$. Car $L'dx = dV'$; par consequent $S.(A - V) L'dx = S. AdV - S. VdV' = AV' - V''$. C'est pourquoy, si on suppose l'intégrale $S.(A - V) L'dx = X$, en prenant cette intégrale de façon, qu'elle s'evanoüisse lorsque $x = o$, & qu'elle devienne B, lorsque $x = a$, de sorte qu'on ait $S. L'dx = V'$, & qu'en supposant $x = a$, V devienne A; qu'on ait aussi $S.(A - V) L'dx = X$, & qu'en supposant $x = a$, X devienne $= B$. Dans ces suppositions les valeurs marquées dans le Corollaire II. deviendront telles qu'on les trouve cy-dessous

$$N+(A-V)N'+(B-X)N''=(N)$$
$$P+(A-V)P'+(B-X)P''=(P)$$
$$Q+(A-V)Q'+(B-X)Q''=(Q)$$
$$R+(A-V)R'+(B-X)R''=(R);$$

Car il eſt evident dans les ſuppoſitions qu'on vient de faire, que $AA'-A''=B$, & que $AV'-V''=X$, & par conſequent que $AA'-A''-AV'+V''=B-X$.

DLXXVIII.

LEMME. L'equation différentielle $dZ=Z\pi dx+\tau du$, dans laquelle π & τ ſont des quantités quelconques conſtantes ou variables, a pour intégrale l'equation $Z=e^{S.\pi dx}\times S.e^{-S.\pi dx}\tau du$, e etant le nombre, dont le logarithme eſt l'unité.

Car cette derniere equation etant diviſée par $e^{S.\pi dx}$ devient $Ze^{-S.\pi dx}=S.e^{-S.\pi dx}\tau du$, & en différentiant celle-cy, on a $dZe^{-S.\pi dx}-Ze^{-S.\pi dx}\pi dx=e^{-S.\pi dx}\tau du$, equation différentielle propoſée.

DLXXIX.

PROBLEME VI. Trouver la variation $\delta\varphi=\delta S.Zdx$ de la formule intégrale $\varphi=S.Zdx$, dans laquelle la quantité Z, outre les lettres x, y, p, q, r, &c. contient l'intégrale meme φ.

SOLUTION. Puisque Z est une fonction des quantités φ, x, y, p, q, r, &c., sa différentielle sera $dZ = Ld\varphi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr +$ &c., & sa variation $\delta Z = L\delta\varphi + N\delta y + \frac{Pd.\delta y}{dx} + \frac{Qdd.\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3\delta y}{dx^3} +$ &c.; par consequent $\delta Z dx = L dx \delta\varphi + H dx$, en supposant $H = N\delta y + \frac{Pd.\delta y}{dx} + \frac{Qdd.\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3\delta y}{dx^3} +$ &c., & $S.\delta Z dx = \delta S.Z dx = \delta\varphi = S.L dx \delta\varphi + S.H dx$. Donc en supposant $\delta\varphi = z$, on aura $z = S.L z dx + S.H dx$, d'où l'on tire, en différentiant, $dz = L z dx + H dx$, &, en intégrant (par le Lemme precedent), $z = e^{S.Ldx} \times S.e^{-S.Ldx} H dx$. Donc, si on suppose $S.Ldx = V$, on aura la variation cherchée $\delta S.Z dx = \delta\varphi = z = e^V S.e^{-V} H dx = e^V \times S.e^{-V} dx \left(N\delta y + \frac{Pd.\delta y}{dx} + \frac{Qdd.\delta y}{dx^2} + \text{\&c.}\right)$. Si on veut avoir cette variation depuis $x = o$, jusqu'a $x = a$, on cherchera la valeur A de l'intégrale $V = S.Ldx$ dans cette supposition, & ayant fait $e^{A-V} N = (N)$; $e^{A-V} P = (P)$; $e^{A-V} Q = (Q)$; $e^{A-V} R = (R)$; &c., on trouvera par les reductions faites comme dans les Problemes precedents, la formule suivante

$$\delta\varphi = \delta S.Zdx = S.dx\delta y\left\{(N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \frac{d^4(S)}{dx^4} - \&c.\right\}$$
$$+ \delta y\left\{(P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \frac{d^3(S)}{dx^3} + \&c.\right\}$$
$$+ \frac{d.\delta y}{dx}\left\{(Q) - \frac{d(R)}{dx} + \frac{dd(S)}{dx^2} - \&c.\right\}$$
$$+ \frac{dd.\delta y}{dx^2}\left\{(R) - \frac{d(S)}{dx} + \&c.\right\}$$
$$+ \frac{d^3\delta y}{dx^3}\left\{(S) - \&c.\right\}$$
$$\&c.$$

DLXXX.

Corollaire. Si on a l'equation différentielle $d\varphi = Zdx$, & que Z contienne l'intégrale $\varphi = S.Zdx$, & de plus les lettres x, y, p, q, r, &c., on pourra trouver par ce Probleme la variation $\delta\varphi = \delta S.Zdx$.

DLXXXI.

Probleme VII. Trouver la variation $\delta S.Zdx = \delta\varphi$ de la formule intégrale $\varphi = S.Zdx$, dans laquelle la quantité Z renferme non ſeulement les lettres x, y, p, q, r, &c., & l'intégrale même φ, mais de plus une autre formule intégrale $\Pi = S.Z'dx$, Z' ne contenant que les quantités x, y, p, q, r, &c.

Solution. Puiſque Z eſt une fonction des quantités φ, Π, x, y, p, q, r, &c., ſa différentielle ſera

$dZ = K\,d\varphi + L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr +$ &c., & sa variation $\delta Z = K\,\delta\varphi + L\,d\Pi + N\,\delta y + \frac{P\,d\delta y}{dx} + \frac{Q\,dd.\delta y}{dx^2} + \frac{R\,d^3\delta y}{dx^3} +$ &c.

De même, puisque Z' est une fonction des quantités x, y, p, q, r, &c. seulement, on aura $dZ' = M'dx + N'dy + P'dp + Q'dq + R'dr +$ &c.; $\delta Z' = N'\delta y + \frac{P'd\delta y}{dx} + \frac{Q'dd\delta y}{dx^2} + \frac{R'd^3\delta y}{dx^3} +$ &c. $= H'$; & par ce que $\Pi = S.Z'dx$, on aura $\delta\Pi = \delta S.Z'dx = S.\delta Z\,dx$; par consequent $\delta\Pi = S.dx\left(N'\delta y + \frac{P'd\delta y}{dx} + \frac{Q'dd\delta y}{dx^2} + \frac{R'd^3\delta y}{dx^3} + \text{\&c.}\right) = S.H\,dx$. Supposons $H = N\delta y + \frac{P\,d\delta y}{dx} + \frac{Q\,dd\delta y}{dx^2} + \frac{R\,d^3\delta y}{dx^3} +$ &c., $\delta\varphi = z$, & $L\delta\Pi + H = u$; & par ce que $\delta\varphi = S.\delta Z dx = z$, on aura $\delta Z dx = dz$; $\delta Z = \frac{dz}{dx} = Kz + u$; par consequent $dz = zK\,dx + u\,dx$, d'où l'on tire (par le Lemme precedent) $z = e^{S.Kdx} S.e^{-S.Kdx} u\,dx = \delta\varphi$. Or $u\,dx = L\,dx\,\delta\Pi + H\,dx = L\,dx\,S.H'dx + H\,dx$; & en supposant $S.K\,dx = V$, on aura $e^{-S.Kdx} u\,dx = e^{-V} \times L\,dx\,S.H'dx + e^{-V} H\,dx$, &, en intégrant de part & d'autre, $S.e^{-S.Kdx} u\,dx = S.e^{-V} L\,dx\,S.H'dx + S.e^{-V} H\,dx$.

Soit $S.e^{-V} L dx = V'$, ou $e^{-V} L dx = dV'$; & on aura $S.e^{-S.Kdx} u dx = S.dV' S.H'dx + S.e^{-V} \times Hdx = V'S.H'dx - S.V'H'dx + S.e^{-V} Hdx$; donc la variation cherchée $\delta\varphi = \delta S.Zdx = z = e^{S.Kdx} \times S.e^{-S.Kdx} u dx = e^V V'S.H'dx - e^V S.V'H'dx + e^V \times S.e^{-V} Hdx$; en remettant dans cette formule les valeurs de H' & de H, on aura

$$\delta S.Zdx = e^V V'.S.dx\left(N'\delta y + \frac{P'd\delta y}{dx} + \frac{Q'dd\delta y}{dx^3} + \frac{R'ddd.\delta y}{dx^3} + \&c.\right)$$
$$- e^V S.V'dx\left(N'\delta y + \frac{P'd\delta y}{dx} + \frac{Q'dd\delta y}{dx^3} + \frac{R'd^3\delta y}{dx^3} + \&c.\right)$$
$$+ e^V S.e^{-V} dx\left(N\delta y + \frac{Pd\delta y}{dx} + \frac{Qdd\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3\delta y}{dx^3} + \&c.\right)$$

Si on veut avoir cette variation depuis $x = o$, jusqu'a $x = a$, on cherchera la valeur A de l'intégrale V, & la valeur A' de l'intégrale V' dans cette suppofition; enfuite on fera, pour abreger,

$$e^{A-V} N + e^A (A' - V') N' = (N)$$
$$e^{A-V} P + e^A (A' - V') P' = (P)$$
$$e^{A-V} Q + e^A (A' - V') Q' = (Q)$$
$$e^{A-V} R + e^A (A' - V') R' = (R)$$

&c.

Et, en faisant les reductions, comme dans les Problemes precedents, on aura la variation cherchée, jusqu'a $x = a$

$$\delta S.Zdx = S.dx\delta y \left\{ (N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \&c. \right\}$$
$$+ \delta y \left\{ (P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \&c. \right\}$$
$$+ \frac{d.\delta y}{dx} \left\{ (Q) - \frac{d(R)}{dx} + \&c. \right\}$$
$$+ \frac{dd.\delta y}{dx^2} \left\{ (R) - \&c. \right\}$$
$$+ \&c.$$

DLXXXII.

COROLLAIRE. Si on a l'equation différentielle $d\varphi = Zdx$, & que Z soit une fonction des quantités φ, Π, x, y, p, q, r, &c., & $\Pi = Z'dx$, Z' ne contenant que les lettres x, y, p, q, r, &c. On pourra trouver par ce Probleme la variation $\delta\varphi$.

DLXXXIII.

PROBLEME VIII. Trouver la variation $\delta S.Zdx = \delta\varphi$ de la formule intégrale $S.Zdx = \varphi$, dans laquelle la quantité Z renferme, outre les lettres x, y, p, q, r, &c. la formule intégrale $\Pi = S.Z'dx$, & Z' contient encore, outre les lettres x, y, p, q, r, &c. la formule intégrale $\Pi = S.Z'dx$. SOLU-

SOLUTION. Puisque Z est une fonction des quantités Π, x, y, p, q, r, &c., sa différentielle sera $dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \&c.$, & sa variation $\delta Z = L\delta\Pi + N\delta y + \frac{Pd\delta y}{dx} + \frac{Qdd\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3\delta y}{dx^3} + \&c. = L\delta\Pi + H$; par consequent $\delta Z dx = L\delta\Pi dx + Hdx$, & la variation cherchée $\delta\varphi = S.\delta Z dx = S.Ldx\delta\Pi + S.Hdx$.

De même, puisque Z' est encore une fonction de Π, x, y, p, q, r, &c., sa différentielle sera $dZ' = L'd\Pi + M'dx + N'dy + P'dp + Q'dq + R'dr + \&c.$, & sa variation $\delta Z' = L'\delta\Pi + N'\delta y + \frac{P'd\delta y}{dx} + \frac{Q'dd\delta y}{dx^2} + \frac{R'd^3\delta y}{dx^3} + \&c. = L'\delta\Pi + H'$; $\delta Z'dx = L'dx\delta\Pi + H'dx$; $\delta\Pi = S.L'dx\delta\Pi + S.H'dx$, par ce que $\Pi = S.Z'dx$, & $\delta\Pi = S.\delta Z'dx$. Supposant presentement $\delta\Pi = S.\delta Z'dx = z$, on aura, en différentiant, $\delta Z'dx = dz$, $\delta Z' = \frac{dz}{dx} = L'\delta\Pi + H'$; $dz = L'dx\delta\Pi + H'dx$, ou $dz = zL'dx + H'dx$. Donc, en intégrant comme dans les deux Problemes precedents, on aura $z = e^{S.Ldx} S.e^{-S.Ldx} H'dx$, ou $\delta\Pi = z = e^V S.e^{-V} H'dx$, en faisant $S.L'dx = V$.

Puis donc qu'on a trouvé cy-dessus $\delta\varphi = S.Ldx\delta\Pi + S.Hdx$, on aura $\delta\varphi = S.e^V Ldx \times S.e^{-V}H'dx + S.Hdx$. Si on suppose $e^V Ldx = dV'$, ou $S.e^V Ldx = V'$, on aura la variation cherchée $\delta\varphi = S.dV'S.e^{-V}H'dx + S.Hdx = V'S.e^{-V}H'dx - S.V'e^{-V}H'dx + S.Hdx$, en remettant dans cette formule les valeurs de H' & de H, on aura

$$\delta\varphi = \delta S.Zdx = V'S.e^{-V}dx\left(N'\delta y + \frac{P'd\delta y}{dx} + \frac{Q'dd\delta y}{dx^2} + \frac{R'd^3\delta y}{dx^3} + \&c.\right)$$
$$- S.e^{-V}V'dx\left(N'\delta y + \frac{P'd\delta y}{dx} + \frac{Q'dd\delta y}{dx^2} + \frac{R'd^3\delta y}{dx^3} + \&c.\right)$$
$$+ S.dx\left(N\delta y + \frac{Pd\delta y}{dx} + \frac{Qdd\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3\delta y}{dx^3} + \&c.\right)$$

Si on veut avoir cette variation depuis $x = o$, jusqu'a $x = a$, on prendra l'intégrale $S.e^V Ldx = A$; dans cette supposition on fera, pour abreger,

$$N + e^{-V}(A - V')N' = (N);$$
$$P + e^{-V}(A - V')P' = (P);$$
$$Q + e^{-V}(A - V')Q' = (Q);$$

Et en faisant la reduction, comme dans les Problemes precedents, on aura la variation cherchée

$$\delta S. Z dx = S. dx \delta y \left\{ (N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \&c. \right\}$$
$$+ \delta y \left\{ (P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \&c. \right\}$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx} \left\{ (Q) - \frac{d(R)}{dx} + \&c. \right\}$$
$$+ \frac{dd.\delta y}{dx^2} \left\{ (R) - \&c. \right\}$$
$$\&c.$$

DLXXXIV.

COROLLAIRE GENERAL. Donc, quelque formule intégrale $\varphi = S. Z dx$, qu'on propose sa variation depuis $x = o$, jusqu'a $x = a$, sera toujours exprimée de la maniere suivante

$$\delta \varphi = S. dx \delta y \left\{ (N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \frac{d^4(S)}{dx^4} - \&c. \right\}$$
$$+ \delta y \left\{ (P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \frac{d^3(S)}{dx^3} + \&c. \right\}$$
$$+ \frac{d\delta y}{dx} \left\{ (Q) - \frac{d(R)}{dx} + \frac{dd(S)}{dx^2} - \&c. \right\}$$
$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2} \left\{ (R) - \frac{d(S)}{dx} + \&c. \right\}$$
$$+ \frac{d^3\delta y}{dx^3} \left\{ (S) - \&c. \right\}$$
$$+ \&c.$$

En prenant dx conſtante, & en determinant les valeurs des lettres en parentheſes (N), (P), (Q), (R), (S), &c. comme dans les Problemes precedents.

On voit de plus, par tout ce que nous avons dit, qu'on peut toujours trouver par le calcul différentiel la variation d'une quantité composée, comme on voudra des formules intégrales, & des formules abſolues, ou ſans intégrales. Par exemple, ſi la quantité V, dont on veut trouver la variation, contient les formules intégrales quelconques $\varphi = S.Zdx$, $\varphi' = S.Z'dx$, $\varphi'' = S.Z''dx$, &c., en différentiant a l'ordinaire, on aura $dV = Kd\varphi + K'd\varphi' + K''d\varphi'' +$ &c., ſa variation ſera $\delta V = K\delta\varphi + K'\delta\varphi' + K''\delta\varphi'' +$ &c. & on trouvera par les regles precedentes les variations particulieres $\delta\varphi$, $\delta\varphi'$, $\delta\varphi''$, &c.. Il eſt encore evident que la variation δV ſera toujours exprimée par la formule ſuivante $\delta V = S.(A)dx\delta y + (B)\delta y + (C)\frac{d\delta y}{dx} + (D)\frac{dd\delta y}{dx^2} +$ &c., dans laquelle (A), (B), (C), (D), &c. ſont des fonctions qu'on pourra trouver par les regles, qu'on a etablies cy-deſſus.

ARTICLE SECOND.

De l'application du Calcul des Variations a la solution des Problemes.

DLXXXV.

Les principaux Problemes, qu'on peut proposer de resoudre par le Calcul des Variations, se reduisent aux deux suivants: le premier, qu'on peut appeller *Direct* est celui-cy: la relation, ou l'equation primitive (E) entre les deux variables x & y etant donnée avec sa variation $\delta(E)$, par laquelle on determine la valeur de δy, variation de y, trouver la variation δV d'une formule V composée, comme on voudra, des deux variables x & y, de leurs derivées, $p=\frac{dy}{dx}$, $q=\frac{dp}{dx}$, $r=\frac{dq}{dx}$, $s=\frac{dr}{dx}$, *&c.*, & même d'intégrales non developpées, qui renferment ces variables, & leurs différentielles de quelqu'ordre que ce soit. Le second Probleme est l'inverse du premier & peut-être enoncé ainsi: une formule quelconque V composée comme dans le Probleme precedent etant donnée, trouver quelle doit être la relation, ou l'equation principale (E) entre les deux variables x & y, pour que la variation δV de cette formule soit egale a une quantité donnée, ou a zero.

DLXXXVI.

On peut resoudre le Probleme direct par les regles du calcul des variations, que nous avons etablies dans l'Article I., car on trouvera par ces regles la variation $\delta V = S.(A)\,dx\,\delta y + (B)\,\delta y + (C)\,\frac{d.\delta y}{dx} + (D)\,\frac{dd.\delta y}{dx^2} +$ &c., & en substituant dans cette formule la valeur de la variation δy trouvée par la relation donnée $\delta(E)$, on aura la variation cherchée δV. Il faut seulement remarquer que les différentielles de tous les ordres dy, ddy, d^3y, &c., & leurs puissances quelconques dy^2, $\overline{ddy}^2$, $\overline{d^3y}^2$, &c., dy^3, $\overline{ddy}^3$, $\overline{d^3y}^3$, &c. peuvent toujours être exprimées par les lettres p, q, r, s, &c., & par les puissances de la différentielle constante dx. Car $dy = p\,dx$, $ddy = dp\,dx = q\,dx^2$, $d^3y = dq\,dx^2 = r\,dx^3$, &c., $dy^2 = p^2\,dx^2$, $dy^3 = p^3\,dx^3$, &c., $\overline{ddy}^2 = q^2\,dx^4$, &c.; cette remarque est souvent necessaire pour rappeller une formule donnée a l'expression $S.Z\,dx$, dont nous nous sommes servis dans l'Article I.. Supposé, par exemple, qu'on ait la formule $V = S.\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{y}}$, & qu'on veüille la

reduire a l'expreſſion $S.Z dx$, on n'aura, pour cela, qu'a ecrire $p^2 dx^2$ pour dy^2 dans la quantité $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, qui par cette ſubſtitution deviendra $= \sqrt{dx^2 + p^2 dx^2} = dx\sqrt{1+pp}$; d'où l'on tirera $S.\frac{dx\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}} = S.Z dx$, & $Z = \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}}$.

DLXXXVII.

Pour reſoudre le Probleme inverſe, il faudra d'abord trouver, comme dans le Probleme direct la variation δV exprimée en δy; ce qu'on pourra toujours faire; enſuite on egalera cette expreſſion de δV a la quantité donnée, ou a zero, & on determinera par cette egalité la relation, ou l'equation cherchée (E) entre les deux variables x & y. C'eſt dans cette partie de la ſolution, que conſiſte toute la difficulté du Probleme inverſe. Nous allons la developper, & etablir les principes neceſſaires pour la ſurmonter, en appliquant generalement le Calcul des Variations aux Problemes *de Maximis & Minimis*, qui ont donné occaſion a la decouverte de ce calcul, & de pluſieurs autres belles methodes.

DLXXXVIII.

Si V eſt une fonction quelconque compoſée de la ſeule variable z, & de conſtantes, & qu'on veüille trouver la valeur, qu'on doit donner a z, pour rendre cette fonction V la plus grande, ou la plus petite poſſible, on demontre dans les elemens ordinaires de la methode *de Maximis* & *Minimis*, qu'on n'a qu'a prendre la différentielle dV, ou la variation quelconque infiniment petite δV, faire dV, ou $\delta V = o$, & determiner par cette equation la valeur de z; d'où il ſuit que, ſi la formule V eſt une fonction compoſée d'autant de variables, qu'on voudra z, x, y, u, *&c.*, on en trouvera toujours le *Maximum*, ou le *Minimum*, en faiſant l'operation que nous venons de dire pour chaque variable en particulier, toutes les autres variables etant regardées comme conſtantes. Car chacune de ces operations donnera une equation entre les variables & les conſtantes; on trouvera autant d'equations, qu'il y a de variables dans V, & on en determinera les valeurs par la comparaiſon des equations.

De même ſi on propoſe une fonction V compoſée de conſtantes & des deux variables x & y, & qu'on demande la valeur qu'il faut donner a la variable y, pour qu'après la ſubſtitution d'une quantité donnée a au lieu de x dans cette fonction V, elle devienne un *Maxi-*

Maximum, ou un *Minimum*, on n'aura qu'a d'abord ſubſtituer dans V la quantité a pour x; ce qui rendra V une fonction de la variable y, & de conſtantes, dont on trouvera le *Maximum*, ou le *Minimum* par l'equation dV, ou $\delta V = o$, comme dans le premier cas; pourvû neantmoins que V ſoit une fonction developpée de x & de y, dans laquelle on puiſſe ſubſtituer actuellement la conſtante a pour la variable x.

DLXXXIX.

Mais ſi dans cette derniere equation la quantité V n'eſt pas une fonction developpée de x, & de y: par exemple, ſi c'eſt une intégrale $S. Z dx$, dans laquelle Z eſt une fonction quelconque de x & de y, la queſtion eſt d'un autre genre, & a beſoin d'une methode bien différente de la premiere, pour être reſolue. Alors on ne peut pas ſubſtituer a dans la différentielle $Z dx$, mais il faudroit d'abord prendre l'intégrale $S. Z dx$, en ſuppoſant x & y variables, & ſubſtituer enſuite dans cette intégrale la conſtante a au lieu de x, par ce que la valeur de cette intégrale depend de la relation entre ces deux variables, & que cette valeur même, après la ſubſtitution de a pour x, change, lorſque la relation entre x & y vient a changer. Dans ce cas on peut propoſer ainſi le Probleme: ſuppoſé qu'on doive prendre l'intégrale $S. Z dx$, de maniere

qu'elle s'evanoüiffe, lorfque $x = o$, & qu'elle ait une valeur quelconque, que nous defignerons par H, après qu'on aura fubftitué la conftante a au lieu de x, on demande quelle doit être la relation, ou l'equation entre les deux variables x & y, pour que la quantité H foit un *Maximum* ou un *Minimum*.

DXC.

Pour refoudre ce Probleme, nous fuppoferons d'abord, comme on a coûtume de faire dans l'analife, que la relation, ou l'equation, qu'on cherche entre x & y, eft deja trouvée, de forte que, quelque valeur determinée qu'on prenne pour x, on ait au moyen de cette equation la valeur determinée de y, & par confequent celle de Z fonction de x & de y, & pour rendre la chofe plus claire, foit AB (*Fig.* 14.) une ligne droite $= a$, autour de laquelle on fuppofe decrites deux courbes FNE, GMC, telles qu'ayant mené la ligne NM perpendiculaire a AB au point P, l'abfciffe commune AP foit $= x$, l'ordonnée $PN = y$, & l'ordonnée correfpondante $PM = Z$. Il eft evident qu'ayant pris Pp pour dx, on aura $Zdx = PMM'p$, & $S. Zdx$ $=$ l'aire $AGMP$, qui s'evanoüit lorfque $x = o$, & devient $AGMCB$, lorfque $x = a$; par confequent cette aire $AGMCB$ fera la quantité defignée par H, qui doit être un *Maximum*, ou un *Minimum*, & dont

la variation δH ſera nulle par le principe general de la methode de *Maximis* & *Minimis*. Suppoſons preſentement que chaque ordonnée PN, où y reçoive une variation quelconque $Nn = \delta y$, & qu'en conſequence l'ordonnée correſpondante PM reçoive la variation $Mm = \delta Z$; il eſt clair que l'aire $Mmm'M' = \delta Z\,dx$ ſera la variation de l'aire $PMM'p$, que l'aire $GgmM$ ſomme des elemens $Mmm'M'$, qu'on exprime par $S.\,\delta Z\,dx$ ſera la variation de l'aire $AGMP$, & que l'aire $GgmcCMG$ ſera la variation de l'aire $AGMCB$ priſe depuis la premiere ordonnée AG, juſqu'a la derniere BC, ou depuis $x = o$, juſqu'a $x = a$. Il faudra donc que cette aire $GgmcC = \delta H$ devienne nulle, quelles que ſoient les variations δy des ordonnées y. Or ces variations ſont arbitraires, & independantes les unes des autres, de ſorte qu'il n'eſt pas neceſſaire de donner des variations a toutes les ordonnées, & qu'on peut ſuppoſer qu'elles ſont toutes nulles, excepté celle des ordonnées qui ſont ſur la ligne infiniment petite Pp; & alors l'aire $GgmcC$, ou la ſomme des elements $Mmm'M'$ ſe reduira a cet element ſeul, & ſera $\delta Z\,dx = \delta H$. Donc lorſque H ſera un *Maximum*, ou un *Minimum*, on aura $\delta Z\,dx = o$.

DXCI.

Cette reflexion suffit pour resoudre le Probleme proposé, lorsque la quantité Z dans la formule intégrale $S.Zdx$ est une fonction quelconque des deux variables finies x & y. Car dans ces cas on aura la différentielle $dZ = Mdx + Ndy$; par consequent la variation $\delta Z = N\delta y$, & l'element $\delta Zdx = Ndx\delta y = o$, quelque soit la variation δy. Or cette variation δy etant entierement arbitraire, on ne peut avoir dans tous les cas $Ndx\delta y = o$, a moins que N ne soit $= o$. On aura donc $N = o$ pour toutes les valeurs de x, & on determinera par cette equation la relation cherchée entre x & y, ou l'equation a la courbe FNE.

EXEMPLE. Soit la formule proposée $S.Zdx = S.dx(bb - nxy + \frac{y^3}{c})$; d'où l'on tire $Z = bb - nxy + \frac{y^3}{c}$, $dZ = Mdx + Ndy = -nydx - nxdy + \frac{3y^2dy}{c}$, & $N = -nx + \frac{3y^2}{c}$. Donc, en faisant $N = o$, on aura $-nx + \frac{3y^2}{c} = o$, & $\frac{ncx}{3} = y^2$, equation cherchée a la courbe FNE, qui sera une parabole ordinaire, dont le parametre est $\frac{nc}{3}$, l'axe AB,

& le sommet en A. Si on suppose $\frac{nc}{3}=f$, ou $n=\frac{3f}{c}$, on aura $y=f^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; $y^3=f^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}$; $Z=bb-nxy+\frac{y^3}{c}=bb-\frac{2f^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{c}$; $Zdx=bbdx-\frac{2f^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx}{c}$ & $S.Zdx=bbx-\frac{4f^{\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5c}$, intégrale qui s'evanoüit, lorsque $x=o$, & qui est un *Maximum*, ou un *Minimum*, quelque constante a qu'on y substitue pour x.

DXCII.

Si la quantité Z dans la formule $S.Zdx$ contient avec les variables x & y leurs différentielles quelconques, ou les rapports de ces différentielles exprimés par les lettres p, q, r, s, &c., de sorte que l'on ait $dZ=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr+$&c., on trouvera par le Probl. III. de l'Art. I.

$$\delta S.Zdx=S.dx\delta y\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\&c.\right)=S.(A)dx\delta y$$

$$+\delta y\left(P-\frac{dQ}{dx}+\frac{ddR}{dx^2}-\&c.\right)\ldots\ldots\ldots=(B)\delta y$$

$$+\frac{d\delta y}{dx}\left(Q-\frac{dR}{dx}+\&c.\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=(C)\frac{d\delta y}{dx}$$

$$+\frac{dd\delta y}{dx^2}\left(R-\&c.\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=(D)\frac{dd\delta y}{dx^2}$$

$$+\&c.$$

ou $S.Zdx = S.(A)dx\delta y + (B)\delta y + (C)\frac{d\delta y}{dx} + (D)\frac{dd\delta y}{dx^2} + \&c.$ variation qu'il faut prendre depuis le commencement de $x=o$, jufqu'au terme de $x=a$, pour qu'elle devienne egale a δH, variation de l'aire $AGCB = H =$ l'intégrale $S.Zdx$ prife depuis A jufqu'a B, ou depuis $x=o$ jufqu'a $x=a$. Or pour que cette intégrale foit un *Maximum*, ou un *Minimum* il faut par le principe general de la methode de *Maximis* & *Minimis*, que fa variation δH foit toujours nulle, quelque foient les variations δy, quand bien même on ne feroit varier que l'ordonnée PN, qui repond a l'abfciffe $AP=x$ moindre que $AB=a$; & c'eft par cette egalité $\delta H=o$, qu'on trouve la relation cherchée entre x & y, où l'equation a la courbe FNE c'eft ce que nous allons expliquer.

Il faut d'abord remarquer que la formule $S.(A)\times dx\delta y + (B)\delta y + (C)\frac{d\delta y}{dx} + (D)\frac{dd\delta y}{dx^2} + \&c.$, qui exprime la variation $\delta S.Zdx$, eft compofée de deux membres dont le premier $S.(A)dx\delta y$ eft fous le figne d'intégration, & l'autre $(B)\delta y + (C)\frac{d\delta y}{dx} + (D)\frac{dd\delta y}{dx^2} + \&c.$ ne contient que des parties *abfolues*, ou qui ne font pas fous le figne $S.$. Il faut remarquer en fecond lieu que, pour avoir toute la variation δH, on doit

ſuppoſer $x = a$ dans la formule entiere $S.(A)dx\delta y + (B)\delta y + (C)\frac{d\delta y}{dx} + (D)\frac{dd\delta y}{dx^2} +$ &c.; ce qu'on peut executer actuellement dans le ſecond membre de cette formule, en y ſubſtituant partout la conſtante donnée a au lieu de x, & après cette ſubſtitution δy deſignera dans ce ſecond membre la variation de la derniere ordonnée $y = BC$, qui repond a l'abſciſſe $AB = a$; & comme cette variation eſt tout a fait arbitraire, & qu'elle ne depend point des variations precedentes, il eſt evident qu'on peut la ſuppoſer egale a zero; ce qui fera evanoüir tout le ſecond membre, dont tous les termes ſont multipliés par $\delta y = o$, ou par $d\delta y = o$, ou par $dd\delta y = o$, &c.; il ne reſtera donc plus que le premier membre $S.(A)dx\delta y$, qu'il faudra egaler a zero, pour avoir toute la variation $\delta H = o$. Or ce premier membre renferme toutes les variations qu'on attribue a toutes les ordonnées precedentes y, puiſqu'il contient la ſomme de tous les elemens $(A)dx\delta y$, qui naiſſent de la variation de chaque ordonnée y, dont l'abſciſſe eſt x; de ſorte que, ſi l'on ſuppoſe qu'il n'y ait qu'une ordonnée y correſpondante a l'abſciſſe x, qui varie, le premier membre $S.(A)dx\delta y$ ſe reduira au ſeul element $(A)dx\delta y$. Mais ſi on ſuppoſe de plus que l'ordonnée ſuivante y', qui repond a l'abſciſſe $x + dx$, reçoive une variation quelconque $\delta y'$, & qu'ayant

mis dans la fonction (A) l'abscisse $x+dx$, pour x, cette fonction devienne (A'), on aura le membre intégral $S.(A)dx\delta y=(A)dx\delta y+(A')dx\delta y'$, & de même, si on suppose que les ordonnées y'', y''', &c., qui repondent aux abscisses $x+2dx$, $x+3dx$, &c., reçoivent les variations $\delta y''$, $\delta y'''$, &c., le membre intégral $S.(A)dx\delta y$ equivaudra a la suite $(A)dx\delta y+(A')dx\delta y'+(A'')dx\delta y''+(A''')\times dx\delta y'''+$&c., qu'on peut concevoir continuée d'un côté jusqu'au commencement de $x=o$, & de l'autre côté, jusqu'au terme de $x=a$. Donc quoique la variation δH soit restrainte au terme de $x=a$, neantmoins elle comprend toutes les variations intermediaires a cause du membre intégral $S.(A)dx\delta y$, & puisque la solution du Probleme exige que le membre intégral soit egale a zero, on aura aussi la suite $(A)dx\delta y+(A')dx\delta y'+(A'')dx\delta y''+(A''')dx\delta y'''+$&c.$=o$. Or les variations δy, $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$, &c. etant toutes arbitraires, & independantes les unes des autres, cette suite ne peut être egale a zero, à moins que chacune de ses parties ne s'evanoüisse, & qu'on n'ait par consequent toutes les equations particulieres $(A)dx\delta y=o$, $(A')dx\delta y'=o$, $(A'')dx\delta y''=o$, &c., lesquelles sont toutes renfermées dans la seule equation indefinie $(A)dx\delta y=o$, de sorte que, quelque valeur qu'on donne a l'abscisse x, & a la variation

riation δy de l'ordonnée y, qui repond a cette abscisse, il faut toujours qu'on ait l'equation $(A)dx\delta y=o$; ce qui ne peut être a moins que la fonction (A) ne soit $=o$, ce sera donc par cette equation $(A)=o$, qu'on trouvera la relation cherchée entre x & y, ou l'equation a la courbe FNE. Dans le cas proposé on a la fonction $(A)=N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\&c.$ Donc dans ce même cas pour trouver la relation entre x & y, qui rendra l'intégrale $H=S.Z\,dx$ un *Maximum*, ou un *Minimum*, il faudra faire $N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\&c.=o$, & resoudre cette equation.

DXCIII.

EXEMPLE. Soit la formule proposée $S.Z\,dx=S.\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y}}$. En faisant $p=\frac{dy}{dx}$, ou $p\,dx=dy$, on aura $\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+pp}$, & $Z=\frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}}$. Donc $dZ=M\,dx+N\,dy+P\,dp=\frac{-dy\sqrt{1+pp}}{2y\sqrt{y}}+\frac{p\,dp}{\sqrt{y(1+pp)}}$; d'où l'on tire $M=o$, $N=-\frac{\sqrt{1+pp}}{2y\sqrt{y}}$, & $P=\frac{p}{\sqrt{y(1+pp)}}$; $Q=o$, $R=o$, &c. Il faut

donc d'abord faire $N - \frac{dP}{dx} = o$ pour avoir la relation cherchée entre x, & y, où l'equation a la courbe FNE, qui sera une equation différentielle du second ordre, qu'il faudra intégrer deux fois successivement pour la reduire a une equation finie entre x & y. La premiere intégration se fera aisément de cette maniere, puisque $N - \frac{dP}{dx} = o$, on aura $Ndx = dP$; $Npdx = pdP$, & $Ndy = pdP$, a cause de $pdx = dy$. Or puisque $M = o$, & que $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$, on aura $dZ = Ndy + Pdp = pdP + Pdp$, &, en intégrant, $Z = Pp + C$ quantité constante. Donc puisque $Z = \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}}$, & que $P = \frac{p}{\sqrt{y(1+pp)}}$, on aura $\frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}} = \frac{pp}{\sqrt{y(1+pp)}} + C$, & $C = \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}} - \frac{pp}{\sqrt{y(1+pp)}} = \frac{1}{\sqrt{y(1+pp)}}$, & en supposant $C = \frac{1}{\sqrt{b}}$, on aura $\frac{1}{b} = \frac{1}{y(1+pp)}$; $y(1+pp) = b$; $pp = \frac{b-y}{y} = \frac{by-yy}{yy}$, $p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{by-yy}}{y}$, & $dx = \frac{ydy}{\sqrt{by-yy}}$, equation différentielle du premier ordre, qui renferme une constante arbitraire b.

Pour intégrer encore cette equation, on remarquera que la différentielle $\frac{ydy}{\sqrt{by-yy}} = \frac{\frac{1}{2}bdy}{\sqrt{by-yy}} - d.\sqrt{by-yy}$, & que $\frac{\frac{1}{2}bdy}{\sqrt{by-yy}}$ eſt la différentielle d'un arc de cercle, dont le rayon eſt $\frac{1}{2}b$, & le ſinus $\sqrt{by-yy}$; de ſorte que, ſi on deſigne cet arc par α, on aura l'intégrale $x = \alpha - \sqrt{by-yy} + c$ conſtante arbitraire. On peut, ſi l'on veut, reduire l'arc α a celui d'un cercle, dont le rayon eſt l'unité; car ſi l'on prend dans ce cercle l'arc β ſemblable a l'arc α, on aura $\alpha = \frac{1}{2}b\beta$, & l'equation deviendra $x = \frac{1}{2}b\beta - \sqrt{by-yy} + c$, qui renferme deux conſtantes b & c introduites par les deux intégrations qu'on a faites.

On voit par là que cette equation, qui fait que la formule propoſée $S.\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y}}$, devient un *Maximum*, ou un *Minimum*, n'eſt point entierement determinée, puiſqu'elle renferme deux conſtantes arbitraires. On peut donc ajouter au Probleme propoſé deux nouvelles conditions, qu'on remplira au moyen de ces deux conſtantes.

Par exemple, ſi on veut que x etant $= a$, P ſoit $= o$, puiſque $P = \frac{p}{\sqrt{y(1+pp)}}$, en ſuppoſant $P = o$, on aura $p = o$; & par ce qu'on a trouvé $p = \frac{\sqrt{by-yy}}{y}$, on aura $\sqrt{by-yy} = o$, & $b = y$, par conſequent l'arc α ſera la demie-circonference du cercle, dont le diametre eſt b, & l'arc β ſemblable a l'arc α ſera auſſi la demie-circonference du cercle, dont le rayon eſt 1. Donc l'equation $x = \frac{1}{2}b\beta - \sqrt{by-yy} + c$, en y ſubſtituant a pour x, & zero pour $\sqrt{by-yy}$ deviendra $a = \frac{1}{2}b\beta + c$, & la conſtante $c = a - \frac{1}{2}b\beta'$, β' etant la demie-circonference du cercle, dont le rayon eſt 1; par conſequent on aura $x = \frac{1}{2}b\beta - \sqrt{by-yy} + a - \frac{1}{2}b\beta'$. Si on veut de plus que, x etant $= o$, y ſoit auſſi $= o$, cette equation deviendra $o = o - o + a - \frac{1}{2}b\beta'$, & $b = \frac{2a}{\beta'}$; ſubſtituant cette valeur de b dans l'equation $x = \frac{1}{2}b\beta - \sqrt{by-yy} + a - \frac{1}{2}b\beta'$, on aura $x = \frac{a\beta}{\beta'} - \sqrt{\frac{2a}{\beta'}y - yy}$.

DXCIV.

Si la quantité Z dans la formule proposée $S. Z\,dx$ contient les variables x, y, p, q, r, &c., & des intégrales non developpées qui renferment les différentielles de ces variables, on trouvera la variation $\delta S. Z\,dx$ prise depuis $x = o$, jusqu'a $x = a$, ou $\delta H = S.(A) \times dx\,\delta y + (B)\,\delta y + (C)\frac{d\delta y}{dx} + (D)\frac{dd\delta y}{dx^2} +$ &c. ; & pour que l'intégrale H, où l'intégrale $S. Z\,dx$ prise depuis $x = o$, jusqu'a $x = a$ devienne un *Maximum*, ou un *Minimum*, il faudra prendre la fonction (A), qui se trouve dans le membre intégral $S.(A)\,dx\,\delta y$, & l'egaler a zero; cette equation $(A) = o$ donnera la relation entre x & y, qui rendra la formule H un *Maximum*, ou un *Minimum*; comme il est evident par ce qui a été etabli cy-dessus. L'autre membre absolu $(B)\,\delta y + (C)\frac{d\delta y}{dx} + (D)\frac{dd\delta y}{dx^2} +$ &c. n'appartenant qu'a la valeur des dernieres ordonnées y, qui repondent a l'abscisse x, lorsqu'elle devient $= a$, ne sert de rien pour trouver cette relation indefinie entre les deux variables x & y, qu'on trouve par l'equation $(A) = o$.

DXCV.

Lorsque dans la formule proposée $S. Z\,dx = H$, la quantité Z contient les lettres p, q, r, s, &c., ou

quelqu'autre intégrale, comme dans les Articles precedents, l'equation $(A)=o$, qui fait que H devient un *Maximum*, ou un *Minimum* eſt différentielle du premier ordre, ou d'un ordre ſupérieur, qu'on reduit a une equation finie par une, ou pluſieurs intégrations ſucceſſives, dont chacune introduit une conſtante arbitraire dans l'equation intégrée. On pourra ſubſtituer dans cette equation autant de différentes valeurs determinées qu'on voudra, pour chaque conſtante arbitraire, & trouver par là une infinité de valeurs de H, qui feront toutes des *Maxima*, ou des *Minima*. On demande preſentement, comment il faut determiner ces conſtantes arbitraires, pour trouver les plus grand de tous ces *Maxima*, ou le plus petit de tous ces *Minima*?

DXCVI.

Pour reſoudre ce nouveau Probleme, on pourra ſe ſervir du membre abſolu $(B)\delta y+(C)\frac{d\delta y}{dx}+(D)\times\frac{dd\delta y}{dx^2}+$ &c., & determiner les conſtantes arbitraires en faiſant $(B)=o$, $(C)=o$, $(D)=o$ dans les deux ſuppoſitions de $x=a$, & de $x=o$. Car puiſque toute la variation $\delta H=S.(A)dx\delta y+(B)\delta y+(C)\frac{d\delta y}{dx}+(D)\frac{dd\delta y}{dx^2}+$ &c. doit être nulle dans les deux ſuppo-

sitions de $x = a$, & de $x = o$, pour que H soit un *Maximum*, ou un *Minimum*, & qu'ayant deja fait le membre intégral $S.(A)\,dx\,\delta y = o$ par l'equation $(A) = o$, sans toucher au membre absolu $(B)\,\delta y + (C)\frac{d\,\delta y}{d x} + \&c.$, nous avons trouvé par là la relation entre x & y, qui rend deja H un *Maximum* ou un *Minimum*, on n'aura qu'a supposer de plus que le membre absolu devient nul dans les deux mêmes suppositions de $x = a$, & de $x = o$, pour avoir le plus grand des *Maxima*, ou le plus petit des *Minima*. Mais cette nullité de tout le membre absolu, où l'equation $(B)\delta y + (C)\frac{d\,\delta y}{d x} + (D)\frac{dd\,\delta y}{d x^2} + \&c. = o$, ne peut avoir lieu generalement a cause de la variation arbitraire δy, a moins que les coefficients (B), (C), (D), &c. ne deviennent chacun en particulier $= o$ dans les mêmes suppositions de $x = a$, & de $x = o$. Donc &c.

DXCVII.

Nous avons supposé dans tout ce Chapitre, que la formule quelconque V, dont on cherchoit la variation δV ne dependoit que des deux variables x, & y, & de plus que la variation δx de x etoit nulle. Or il n'est pas difficile de rendre ce calcul des variations entierement general par les principes suivants, que nous avons deja etablis. 1° Que, V etant tout ce qu'on

voudra, la variation de l'intégrale $S.V$, ou $\delta S.V = S.\delta V$. 2° Que, la variation de la variable quelconque V etant δV, la variation de sa différentielle dV, ou $\delta dV = d\delta V$, $\delta ddV = dd\delta V$, $\delta d^3 V = d^3 \delta V$. 3° Que l'intégrale $S.\pi d\tau = \pi\tau - S.\tau d\pi$, par consequent que $S.Pd\delta y = P\delta y - S.\delta y dP$, &c. 4° Que L, & u etant des quantités quelconques, l'intégrale de l'equation différentielle $dz = Lzdx + du$ est $z = e^{S.Ldx} S.e^{-S.Ldx} du$. 5° Que, pour trouver la variation δV de la formule V composée, comme on voudra, des variables x, y, u, z, &c., dont chacune ait sa variation, on n'a qu'à prendre la différentielle $dV = Mdx + Ndy + Pdu + Qdz +$ &c., & substituer dans cette formule les variations au lieu des différentielles, pour avoir $\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta u + Q\delta z +$ &c., & si on vouloit que quelques unes de ces changeantes: par exemple, u & z n'eussent point de variations, on n'auroit qu'a effacer dans la différentielle les termes $P\delta u$, & $Q\delta z$, où se trouvent les variations nulles δu, & δz. 6° Enfin on pourroit designer par les lettres p, q, r, s, &c., p', q', r', s', &c., p'', q'', r'', s'', &c. les différentielles dx, ddx, d^3x, &c., dy, ddy, d^3y, &c., du, ddu, d^3u, &c., en supposant $dx = p$, $dp = ddx = q$, $dq = d^3x = r$, &c., $dy = p'$, $dp' = ddy = q'$, $dq' = d^3y = r'$, &c.

DXCVIII.

DXCVIII.

Etant proposée une formule intégrale indefinie representée par $S.V$, dans laquelle V designe une fonction quelconque determinée des variables x, y, z, & de leurs différences dx, dy, dz, ddx, ddy, ddz, *&c.*, on trouvera aisément par les methodes precedentes la relation que ces variables doivent avoir entr'elles, pour que la formule $S.V$ devienne un *Maximum*, ou un *Minimum*. Il faudra, suivant la methode de *Maximis* & *Minimis*, différentier la proposée $S.V$ en regardant les variables x, y, z, dx, dy, dz, ddx, ddy, ddz comme variables, & faire la différentielle qui en resulte $= o$. Or en designant ces variations par δ, nous aurons par les principes etablis $\delta S.V = o$, ou $S.\delta V = o$. Maintenant soit V tel que $\delta V = n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + r\delta d^3x +$ *&c.* $+ N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + R\delta d^3y +$ *&c.* $+ \nu\delta z + \pi\delta dz + \chi\delta d^2z + \rho\delta d^3z +$ *&c.*, nous aurons l'equation $S.n\delta x + S.p\delta dx + S.q\delta d^2x + S.r\delta d^3x +$ *&c.* $+ S.N\delta y + S.P\delta dy + S.Q\delta d^2y + S.R\delta d^3y +$ *&c.* $+ S.\nu\delta z + S.\pi\delta dz + S.\chi\delta d^2x + S.\rho\delta d^3z +$ *&c.* $= o$. Mais $\delta dx = d\delta x$, $\delta d^2x = d^2\delta x$, & ainsi de suite: donc

en intégrant par parties, comme nous avons fait precedemment, on aura $S.p\,d\,\delta x = p\,\delta x - S.dp\,\delta x$; $S.q\,d^2\,\delta x = q\,d\,\delta x - dq\,\delta x + S.d^2 q\,\delta x$; $S.r\,d^3\,\delta x = r\,d^2\,\delta x - dr\,d\,\delta x + d^2 r\,\delta x - S.d^3 r\,\delta x$, & ainsi des autres, & l'equation precedente se changera en celle-cy (A):

$$S.(n - dp + d^2 q - d^3 r + \&c.)\,\delta x + S.(N - dP + d^2 Q - d^3 R + \&c.)\,\delta y + S.(\nu - d\pi + d^2\chi - d^3\rho + \&c.)\,\delta z + (p - dq + d^2 r - \&c.)\,\delta x + (q - dr + \&c.)\,d\,\delta x + (r - \&c.)\,d^2\,\delta x + (P - dQ + d^2 R - \&c.)\,\delta y + (Q - dR + \&c.)\,d\,\delta y + (R - \&c.)\,d^2\,\delta y + (\pi - d\chi + d^2\rho - \&c.)\,\delta z + (\chi - d\rho + \&c.)\,d\,\delta z + (\rho - \&c.)\,d^2\,\delta z + \&c. = 0.$$

On en tirera premierement l'equation (B):

$$(n - dp + d^2 q - d^3 r + \&c.)\,\delta x + (N - dP + d^2 Q - d^3 R + \&c.)\,\delta y + (\nu - d\pi + d^2\chi - d^3\rho + \&c.) = 0.$$

Et ensuite l'equation (C):

$$(p - dq + d^2 r - \&c.)\delta x + (q - dr + \&c.)d\delta x + (r - \&c.)d^2\delta x + \&c. + (P - dQ + d^2 R - \&c.)\delta y + (Q - dR + \&c.)d\delta y + (R - \&c.)\times d^2\delta y + \&c. + (\pi - d\chi + d^2\rho)\delta z + (\chi - d\rho + \&c.)d\delta z + (\rho - \&c.)d^2\delta z + \&c. = 0.$$

Il faut bien diſtinguer ces deux equations (B) & (C), comme nous avons expliqué, & de plus il faut ſe rappeller que dans la derniere equation, chacun de ſes termes comme $p\delta x$ depend d'une intégration partielle de la formule $S.pd\delta x$, & que par conſequent on peut lui ajouter, ou en retrancher une quantité conſtante. Or la condition par laquelle on doit determiner cette conſtante, eſt qu'elle faſſe evanoüir le terme $p\delta x$ au point où commence l'intégrale $S.pd\delta x$. Il faudra donc retrancher de $p\delta x$ ſa valeur en ce point. Soit donc le premier membre de l'equation (C) exprimé generalement par Z, & ſoit la valeur de Z; où commence l'intégrale $S.V$, exprimée par Z', il eſt clair que $Z - Z' = 0$ fera l'expreſſion complette de l'equation (C). Enfin pour ſe delivrer dans les equations trouvées des différences indeterminées δx, δy, δz, $d\delta x$, $d\delta y$, &c. on obſervera par la nature du probleme, ſi elles ont entr'elles quelque rapport donné, on les reduira au moindre nombre, & on fera enſuite

egal a zero le coefficient de chacune de celles qui reſtent. Mais, ſi elles ſont independantes les unes des autres, l'equation (B) fournira tout d'un coup les trois ſuivantes

$$n - dp + d^2 q - d^3 r + \&c. = o$$

$$N - dP + d^2 Q - d^3 R + \&c. = o$$

$$\nu - d\pi + d^2 \chi - d^3 \rho + \&c. = o.$$

DXCIX.

EXEMPLE. Nous avons deja rapporté (Article DXCIII.) un Exemple, qui renferme le Probleme, que les Geométres appellent *de la Brachiſtochrone*, ou de la plus vîte deſcente. Soit maintenant ce Probleme exprimé plus generalement par la formule $S. \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}}$ dans laquelle x repreſente l'abſciſſe verticale, & y, z deſignent les deux ordonnées horiſontales, & perpendiculaires l'une a l'autre, la formule propoſée ſera l'expreſſion du tems, comme on ſçait par la Mecanique. Cette expreſſion etant comparée a $S.V$, on a $V = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}}$, & en différentiant par δ, ſuivant la methode de l'Article premier, nous aurons $\delta V = - \frac{\delta x \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{2x\sqrt{x}} + \frac{dx \delta dx}{\sqrt{x}. \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} +$

$\frac{dy\delta dy}{\sqrt{x}.\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}+\frac{dz\delta dz}{\sqrt{x}.\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$; d'où l'on tire, en ſubſtituant, pour abreger, ds a la place de $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, $n=-\frac{ds}{2x\sqrt{x}}$, $p=\frac{dx}{ds\sqrt{x}}$, $P=\frac{dy}{ds.\sqrt{x}}$; $\pi=\frac{dz}{ds\sqrt{x}}$, & q, r, N, Q, &c. $=o$, comme on voit en comparant avec la formule generale (Art. DXCVIII.). Cet Exemple renferme pluſieurs cas; mais nous ne ferons que les indiquer, par ce qu'ils appartiennent a des Problemes de Mecanique, qui n'entrent point dans l'objet de cet Ouvrage.

1°. Si on demande de trouver en general entre toutes les courbes poſſibles celle de la plus vîte deſcente, on aura dans ce cas $n-dp=o$, $-dP=o$, $-d\pi=o$, c'eſt a dire, $-\frac{ds}{2x\sqrt{x}}-d.\frac{dx}{ds\sqrt{x}}=o$, $-d.\frac{dy}{ds\sqrt{x}}=o$, $-d.\frac{dz}{ds\sqrt{x}}=o$. Or puiſque ces trois equations doivent repreſenter une même courbe, il faut qu'elles ſe reduiſent a deux ſeulement. Multiplions la ſeconde par $2.\frac{dy}{ds\sqrt{x}}$, & l'ajoutant a la troiſieme multipliée par $2.\frac{dz}{ds\sqrt{x}}$, on aura $d\left(\frac{1}{x}-\frac{dx^2}{ds^2.x}\right)=o$, en ſubſtituant ds^2 au lieu de $dx^2+dy^2+dz^2$,

&, en différentiant, & divisant par $\frac{2dx}{ds\sqrt{x}}$, on a la premiere equation $-\frac{ds}{2x\sqrt{x}} - d.\frac{dx}{ds.\sqrt{x}} = o$. Il ne s'agit donc que d'intégrer les deux equations $d.\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = o$, & $d.\frac{dz}{ds\sqrt{x}} = o$. La premiere donne $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ & la seconde $\frac{dz}{ds.\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$, dans lesquelles $\frac{1}{\sqrt{a}}$ & $\frac{1}{\sqrt{b}}$ sont des quantités constantes, d'où l'on tire $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, laquelle equation fait connoître que la courbe est dans un même plan, & par consequent a simple courbure.

Pour determiner la nature de cette courbe, nous la rapporterons a deux coordonnées, dont l'une soit x, & l'autre t, on aura $\sqrt{y^2 + z^2} = t$. Mais $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$; donc en intégrant $z = \frac{y\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, d'où l'on tire $z = \frac{t\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$; $y = \frac{t\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$; $dy = \frac{dt\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$; $ds = \sqrt{dx^2 + dt^2}$, & enfin $\frac{dy}{ds.\sqrt{x}} = \frac{dt\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}.\sqrt{x}.\sqrt{dx^2+dt^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, qu'on reduira a $dt = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{c-x}}$, en faisant $c = \frac{ab}{a+b}$, qui ne dif-

fére de l'exemple premier que par les denominations; car en multipliant le numerateur, & le denominateur par $\sqrt{x}$, on aura $\frac{x\,dx}{\sqrt{cx-xx}}=dt$, la même equation, que dans le premier exemple, qui eſt l'equation a une cycloide décrite ſur une baſe horiſontale par un cercle, dont le diametre $=c$.

2º Si on vouloit limiter l'equation de telle ſorte, que le premier & le dernier point de la *Brachiſtochrone* fuſſent donnés, il eſt evident que les coordonnées x, y, z n'auroient point de variations par rapport a ces points, & que δx, δy, δz, $d\delta x$, $d\delta y$, & par conſequent auſſi tous les termes de l'equation (*C*) ſeroient $=o$. Il s'agit donc de determiner la conſtante c, de telle maniere que la cycloide paſſe par les deux points donnés. Si le premier point eſt donné, & qu'un corps partant de ce point doive arriver dans le moindre tems a un plan horiſontal donné, il eſt clair que Z ſera nul, & que l'equation (*C*) donnera $Z'=o$, c'eſt a dire, $\frac{dx}{ds\sqrt{x}}\delta x+\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\delta y+\frac{dz}{ds\sqrt{x}}\delta z=o$, equation qui n'aura lieu que dans le point où la Brachiſtochrone rencontre le plan.

Or, puiſque ce plan eſt ſuppoſé donné de poſition, l'abſciſſe x qui y repond ſera donnée; ce qui rendra ſa variation $\delta x=o$, mais le reſte de l'equation devra être réel, quelles que ſoyent δy & δz, on aura donc

$\frac{dy}{ds\sqrt{x}}=o$, & $\frac{dz}{ds\sqrt{x}}=o$, d'où l'on tire $a=\infty$, & $b=\infty$, a cause de $\frac{dy}{ds\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$, & $\frac{dz}{ds\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{b}}$; & la cycloide se transformeroit alors en une droite verticale.

Mais si le plan donné, au lieu d'être horisontal etoit vertical, & perpendiculaire a l'axe des y, ou des z, on auroit alors, par le même principe, $\delta y=o$, ou $\delta z=o$, & par consequent $\frac{dx}{ds\sqrt{x}}=o$, $\frac{dz}{ds\sqrt{x}}=o$ dans le premier cas, & $\frac{dx}{ds\sqrt{x}}=o$, $\frac{dy}{ds\sqrt{x}}=o$ dans le second, d'où l'on tire $\frac{dz}{dx}=o$, & $\frac{dy}{dx}=o$, ce qui fait voir que la tangente de la courbe en ce point est parallele a l'axe des abscisses, & par consequent perpendiculaire au plan donné. Ainsi la cycloide devroit être telle, qu'elle rencontrât le plan donné a angles droits.

Si au lieu d'un plan on supposoit que la *Brachisto-chrone* dût être terminée par une surface quelconque, il est evident que les variations δx, δy, δz de l'equation (C) dependroit de la nature de la surface courbe. Soit l'equation différentielle de la surface $dz=Pdx+Qdy$, ou $\delta z=P\delta x+Q\delta y$, substituant cette valeur de δz dans l'equation (C), on aura $\Big(\frac{dx}{ds\sqrt{x}}+$

$\left.\frac{P dz}{ds \sqrt{x}}\right) \delta x + \left(\frac{dy}{ds \sqrt{x}} + \frac{Q dz}{ds \sqrt{x}}\right) \delta y = o$, d'où l'on tire $dx + P dz = o$, & $dy + Q dz = o$, ce qui donne $\frac{dx}{dy} = \frac{P}{Q}$. Lesquelles equations font connoitre que la *Brachyſtochrone* rencontre encore la ſurface donnée a angles droits. Si la courbe devoit être terminée par deux ſurfaces données de poſition, il ſaudroit alors dans l'equation (C) faire $Z = o$, & $Z' = o$, & en operant comme cy-deſſus, on trouveroit pour le premier & le dernier point de la courbe la même proprieté, c'eſt a dire, que la courbe cherchée ſera celle, qui entre toutes les cycloides poſſibles rencontrera les ſurfaces données a angles droits; on pourroit demontrer cette condition generale de la *Brachyſtochrone* par la ſimple Geométrie, mais ce n'eſt pas icy le lieu.

3.° Si la courbe devoit être toute couchée ſur la ſurface donnée, dont l'equation différentielle ſoit $dz = P dx + Q dy$, on changera la caracteriſtique d en δ, pour avoir $\delta z = P \delta x + Q \delta y$, equation qui donne en general le rapport entre δz, δx, δy. Subſtituant enſuite cette valeur de δz dans l'equation (B), & faiſant les deux coefficients de δx, & de δy, chacun $= o$, on aura $-P.d.\frac{dz}{ds \sqrt{x}} - \frac{ds}{2x \sqrt{x}} - d.\frac{dx}{ds \sqrt{x}} =$

$=o$; $-Q.d.\frac{dz}{ds\sqrt{x}}-d.\frac{dy}{ds\sqrt{x}}=o$. Ces equations reviennent au même, etant combinées avec l'equation a la ſurface $dz=Pdx+Qdy$. Ce dont il eſt aiſé de s'aſsûrer en multipliant la premiere par $\frac{2dx}{ds\sqrt{x}}$, & la ſeconde par $\frac{2dy}{ds\sqrt{x}}$; & les ajoutant, on aura, en reduiſant, $-d.\frac{1}{x}-\frac{dx}{x^2}=o$.

On comparera donc une de ces equations a volonté avec l'equation a la ſurface, pour avoir la *Brachyſtochrone* cherchée. Si le premier, & le dernier point de la courbe etoient donnés, tous les termes de l'equation (C) s'evanoüiroient, comme nous avons deja demontré. Mais ſi l'un de ces points etoit arbitraire, il faudroit ſubſtituer au lieu de δz ſa valeur $P\delta x+Q\delta y$, pour avoir les equations $P.\frac{dz}{ds\sqrt{x}}+\frac{dx}{ds\sqrt{x}}=o$, & $Q.\frac{dz}{ds\sqrt{x}}+\frac{dy}{ds\sqrt{x}}=o$, qu'on traiteroit comme les precedentes. Enfin ſi l'on ajoutoit cette condition, que le mobile dût arriver dans le tems le plus court, a une courbe tracée ſur la ſurface, ſuppoſant la courbe donnée par l'equation $dy=mdx$, on auroit $\delta y=m\delta x$, laquelle valeur de δy etant ſubſtituée dans l'equation (C), on fera $P.\frac{dz}{ds\sqrt{x}}+\frac{dx}{ds\sqrt{x}}$

$+\left(\mathcal{Q}.\frac{dz}{ds\sqrt{x}}+\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\right)m=o$, ou bien $(P+\mathcal{Q}m)\,dz$ $+dx+m\,dy=o$, equation qui renferme les conditions pour que la *Brachyſtochrone* rencontre la courbe donnée.

DC.

REMARQUE. Les exemples precedents ſont connoitre l'utilité de la methode des variations, dans la ſolution generale du fameux probleme des *Iſoperimetres*. Nous avons ômis les details geometriques, dont ces exemples ſont ſuſceptibles, & qui n'entrent point dans le plan de ce Traité. Il ne ſera pas hors de propos de faire entrevoir comme de loin l'avantage de cette methode pour reſoudre les Problemes les plus difficiles.

Il eſt demontré par le ſçavant M.[r] Euler, que dans les trajectoires, décrites par un nombre de corps quelconque, l'intégrale de la vîteſſe multipliée par l'element de la courbe eſt toujours un *Maximum*, ou un *Minimum*, c'eſt a dire, ſoient generalement tant de copps, qu'on voudra, M, M', M'', &c., qui agiſſent les uns ſur les autres d'une maniere quelconque, & qui ſoient, ſi l'on veut, animés par des forces centrales en raiſon des fonctions quelconques des diſtances; ſi s, s', s'', &c. denotent les eſpaces parcourus par ces corps dans le tems t, & v, v', v'', &c. les vîteſſes a la fin de

ce tems, la formule $MS.vds + MS.v'ds' + M'S.v''ds''$ $+$ &c. sera toujours un *maximum* ou un *minimum*. On voit que ce Probleme est renfermé generalement dans ce que nous avons dit (Art. DXCVII.). Une explication plus ample de cette belle methode nous meneroit trop loin, surtout, si nous voulions l'appliquer a des Problemes de Mecanique, qui nous eloigneroient de l'objet que nous nous sommes proposé, de ne traiter que du Calcul.



CHAPITRE X.

Contenant les principes des plus nouvelles methodes du Calcul Intégral.

DCI.

On ſçait que le Calcul Intégral ſe reduit a la ſolution de ce Probleme: une fonction, ou une equation différentielle quelconque etant propoſée, trouver ſi elle a les conditions, qui doivent avoir lieu, pour qu'elle ait une intégrale, &, lorſqu'elle a ces conditions, trouver ſon intégrale. On ſçait encore, que, ſi on pouvoit intégrer toutes les equations différentielles, on pourroit auſſi intégrer toutes les fonctions différentielles, qui ont les conditions neceſſaires pour être intégrables. Car on peut toujours egaler la fonction différentielle propoſée a la différence du même ordre d'une nouvelle variable, & reduire par là cette fonction a une equation différentielle du même ordre, qui ſera intégrable, lorſque la fonction pourra être intégrée. Suppoſé, par exemple, que la fonction différentielle $Adx + Bdy + \&c.$ ſoit intégrable, on pourra l'egaler a la différence du même ordre du d'une nouvelle variable u, & faire $Adx + Bdy + \&c. = du$: equation, qui

fera intégrable, lorfque la fonction $Adx + Bdy + \&c.$ pourra être integrée, puifqu'on aura l'intégrale $S.(Adx + Bdy + \&c.) = u + C$ conftante ; par confequent l'intégrale u de la fonction propofée $= S.(Adx + Bdy) - C$. Lors donc qu'on aura trouvé quelque methode generale, pour intégrer toutes les equations différentielles qui ne font pas abfurdes, on pourra auffi intégrer par la même methode toutes les fonctions différentielles qui feront intégrables, & le Probleme general du Calcul Intégral fera refolu.

DCII.

Deux fçavants Auteurs M.r Fontaine, & M.r de Condorcet ont entrepris de refoudre ce Probleme dans toute fon etenduë. Nous ne pretendons point expliquer icy des Ouvrages auffi fublimes & auffi difficiles, jufqu'a les mettre a la portée du commun des Algebriftes. Nous nous contenterons de developper les principes fondamentaux, dont fe fervent ces grands Calculateurs, & de preparer nos Lecteurs a l'intelligence des methodes generales qu'ils ont données. Nous commencerons par la maniere de différentier les fonctions indeterminées ; elle eft comme la clef des nouvelles decouvertes, furtout dans la partie du calcul intégral, qui a pour objet les equations de condition.

DCIII.

Suppoſons que V ſoit une fonction de pluſieurs variables x, y, z, u, &c., & qu'on prenne la différence de cette fonction, en ne faiſant varier que x, & qu'on ait $dV = Mdx$, qu'on prenne la différence dV en ne faiſant varier que y, & qu'on ait $dV = Ndy$, qu'on prenne dV en ne faiſant varier que z, & qu'on ait $dV = Pdz$, & ainſi de ſuite; on ſçait par les premiers principes du calcul différentiel que la différence de la fonction V, en faiſant tout varier, ſera $dV = Mdx + Ndy + Pdz + Qdu + \&c.$

Or ſuivant la maniere de M.r Fontaine, pour deſigner le coefficient M de dx dans la différence de V priſe en ne faiſant varier que x, on ecrit $\frac{dV}{dx}$, de ſorte que cette expreſſion ſignifie la différence dV priſe en ne faiſant varier que x, & diviſée par dx, & que $\frac{dV}{dx}dx$ ſignifie la même choſe que Mdx, c'eſt a dire, la différence même de la fonction V priſe en ne faiſant varier que x. Cette expreſſion $\frac{dV}{dx}$ eſt donc bien différente de celle-cy $\frac{1}{dx}dV$. La premiere ſignifie la différence dV priſe en ne faiſant varier que x, & diviſée par dx; la ſeconde ſignifie la différence dV priſe en faiſant tout varier, & diviſeé par dx. De même pour deſigner le coefficient N de dy dans

la différence dV prise en ne faisant varier que y, on ecrit $\frac{dV}{dy}$, de sorte que cette expression signifie la différence dV prise en ne faisant varier que y, & divisée par dy, & que $\frac{dV}{dy}dy = Ndy$.

Par la même raison pour designer le coefficient de dx dans la différence de $\frac{dV}{dx}$, ou dans la différence dM du coefficient M prise en ne faisant varier que x, on ecrit $\frac{ddV}{dx^2}$, de sorte que cette expression signifie la différence de $\frac{dV}{dx}$ prise en ne faisant varier que x, & divisée par dx, & que $\frac{ddV}{dx^2}dx$ exprime cette différence même. Pour designer la différence de $\frac{dV}{dx}$ prise en ne faisant varier que y, & divisée par dy, on ecrit $\frac{ddV}{dxdy}$, & $\frac{ddV}{dxdy}dy$ exprime cette différence même.

Il faut remarquer que $\frac{ddV}{dxdy}$ exprime aussi la différence de $\frac{dV}{dy}$ prise en ne faisant varier que x, & divisée par dx, de sorte que ces deux expressions $\frac{ddV}{dxdy}$, & $\frac{ddV}{dydx}$ ne font qu'une même chose, car nous avons demon-

demontré ailleurs, que si $dV = Mdx + Ndy + Pdz + \&c.$, V etant toujours une fonction de x, de y, de z, &c., on aura $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, en prenant ces expressions a la maniere de M.r Fontaine. Or suivant cette maniere $M = \frac{dV}{dx}$, & $N = \frac{dV}{dy}$, & la différence dM prise en ne faisant varier que y, & divisée par dy est $\frac{ddV}{dxdy}$, & la différence dN prise en ne faisant varier que x, & divisée par dx est $\frac{ddV}{dydx}$; donc $\frac{ddV}{dxdy} = \frac{ddV}{dydx}$. Enfin les expressions $d.\frac{dV}{dx}$, & $\frac{ddV}{dx}$ signifient egalement la différence de $\frac{dV}{dx}$, ou du coefficient M, prise en faisant tout varier.

DCIV.

On comprend donc aisément les expressions suivantes, dans lesquelles on suppose que V est une fonction de plusieurs variables x, y, z, u, &c.

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dz + Q\,du + \&c.$$

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz + \frac{dV}{du}du + \&c.$$

$$d.\frac{dV}{dx} \text{ ou } \frac{ddV}{dx} = \frac{ddV}{dx^2}dx + \frac{ddV}{dxdy}dy + \frac{ddV}{dxdz}dz + \frac{ddV}{dxdu}du + \&c.$$

$$d.\frac{dV}{dy} \text{ ou } \frac{ddV}{dy} = \frac{ddV}{dydx}dx + \frac{ddV}{dy^2}dy + \frac{ddV}{dydz}dz + \frac{ddV}{dydu}du + \&c.$$

$$d.\frac{dV}{dz} \text{ ou } \frac{ddV}{dz} = \frac{ddV}{dzdx}dx + \frac{ddV}{dzdy}dy + \frac{ddV}{dz^2}dz + \frac{ddV}{dzdu}du + \&c.$$

$$d.\frac{dV}{du} \text{ ou } \frac{ddV}{du} = \frac{ddV}{dudx}dx + \frac{ddV}{dudy}dy + \frac{ddV}{dudz}dz + \frac{ddV}{du^2}du + \&c.$$

$$d.\frac{ddV}{dx^2} \text{ ou } \frac{dddV}{dx^2} = \frac{dddV}{dx^3}dx + \frac{dddV}{dx^2dy}dy + \frac{dddV}{dx^2dz}dz + \frac{dddV}{dx^2du}du + \&c.$$

$$d.\frac{ddV}{dxdy} \text{ ou } \frac{dddV}{dxdy} = \frac{dddV}{dx^2dy}dx + \frac{dddV}{dxdy^2}dy + \frac{dddV}{dxdydz}dz + \frac{dddV}{dxdydu}du + \&c.$$

&c. &c.

DCV.

La premiere methode de M.r Fontaine eſt fondée ſur les quatre Theoremes ſuivants.

THEOREME I. V etant une fonction homogene de pluſieurs variables x, y, z, u, &c., dont la dimenſion eſt e, & la différence $dV = M\,dx + N\,dy + P\,dz + Q\,du + \&c.$ on aura $eV = Mx + Ny + Pz + Qu + \&c.$

DEMONSTRATION. En ſuppoſant que V & V' font deux fonctions pareilles, la premiere des quantités x, y, z, u, &c.; la ſeconde des quantités infiniment peu, plus ou moins grandes x', y', z', u', &c., ou $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, $u + \delta u$, &c., on aura par la methode des variations $V' - V$, ou $\delta V = M \delta x + N \delta y + P \delta z + Q \delta u +$ &c. Or puiſque les variations δx, δy, δz, &c. font arbitraires, on peut ſuppoſer qu'elles font egales, chacune reſpectivement aux différences dx, dy, dz, du, &c. priſes proportionelles a leurs intégrales x, y, z, u, &c. Dans cette ſuppoſition on aura $V' - V = \delta V = M dx + N dy + P dz + Q du +$ &c., & les deux fonctions V & V' feront ſemblables. Donc, puiſque la dimenſion de V eſt e, on aura par la proprieté des fonctions ſemblables $V' : V = x'^e : x^e = y'^e : y^e = z'^e : z^e = u'^e : u^e$; d'où l'on tire $V' - V : V = x'^e - x^e : x^e = y'^e - y^e : y^e = z'^e - z^e : z^e =$ &c., ou $dV : V = d.x^e : x^e = d.y^e : y^e = d.z^e : z^e =$ &c., ou $dV : V = e\,dx : x = e\,dy : y = e\,dz : z =$ &c.; par conſequent $dV = eV\frac{dx}{x}$; $dx : x = dy : y = dz : z =$ &c., & $dy = y\frac{dx}{x}$; $dz = z\frac{dx}{x}$; $du = u\frac{dx}{x}$; &c. Donc en ſubſtituant pour dV, dy, dz, du, &c. ces valeurs dans l'equation $dV = M dx + N dy + P dz + Q du +$ &c., on aura $eV\frac{dx}{x}$

$= M dx + Ny \frac{dx}{x} + Pz \frac{dx}{x} + Qu \frac{dx}{x} + \&c.$, & $eV = Mx + Ny + Pz + Qu + \&c.$ C. Q. F. D.

DCVI.

Soit, par exemple, $V = axx + byz$, fonction homogene de deux dimenſions par rapport aux variables x, y, & z; on aura $dV = 2axdx + bzdy + bydz$, &, par le Theoreme, $eV = 2V = 2axx + bzy + byz = 2axx + 2byz$; $V = axx + byz$, comme il convient. Mais ſi la fonction V n'eſt point homogene par rapport aux variables qu'elle contient, par exemple, ſi $V = cx + bzy$, le Theoreme premier n'aura point lieu. Car en différentiant on aura $dV = cdx + bzdy + bydz$; mais on n'aura pas $2V = cx + bzy + byz$, puiſque $2V = 2cx + 2byz$ par la ſuppoſition. La raiſon en eſt, qu'on a ſuppoſé dans la demonſtration du Theoreme que V & V' etoient des fonctions ſemblables, & qu'on peut faire cette ſuppoſition, lorſque V eſt une fonction homogene par rapport a ſes variables. Car en prenant $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $z' = z + dz$, &c., & faiſant de plus $x:dx = y:dy = z:dz = \&c.$, les deux fonctions $axx + byz$, & $ax'x' + by'z'$ font ſemblables, & la premiere eſt a la ſeconde, comme xx eſt a $x'x'$, & comme yy eſt a $y'y'$, &c. Mais ſi la fonction V n'eſt point homogene

par rapport a ſes variables, par exemple, ſi $V = cx + byz$, les deux fonctions $cx + byz$, & $cx' + by'z'$, même en ſuppoſant les proportions $x : dx = y : dy = z : dz$, ne feront point ſemblables, & la premiere fonction ne ſera pas a la ſeconde, comme xx eſt a $x'x'$; puiſque byz etant a $by'z'$, comme yy eſt a $y'y'$, ou comme xx eſt a $x'x'$, cx n'eſt pas a cx', comme xx eſt a $x'x'$, mais comme x eſt a x'.

DCVII.

On peut neantmoins rendre le Theoreme premier abſolument general au moyen d'un parametre p qu'on peut traiter comme variable, ou comme conſtant ſuivant le beſoin, & qui etant regardé comme l'unité, pour laquelle on peut prendre telle quantité, qu'on veut, ſervira a rendre la fonction V homogene par rapport aux variables x, y, z, u, *&c.* & p. Par exemple, ſi on a $V = cx + byz$, on ſera $V = cpx + byz$, fonction homogene de deux dimenſions, qui ſera de même valeur que la propoſée $cx + byz$, par ce que p repreſente l'unité. On aura donc, en faiſant tout varier, $dV = cxdp + cpdx + bzdy + bydz$; &, par le Theoreme premier, $eV = 2V = cxp + cpx + bzy + byz = 2cpx + 2byz$, & diviſant par 2, $V = cpx + byz = cx + byz$, en mettant l'unité au lieu du parametre p.

DCVIII.

En general suppofant que V foit une fonction quelconque de dimenfion e par rapport aux variables x, y, z, u, &c., qu'elle contient, & que dans le cas où cette fonction n'eft point homogene par rapport a ces variables, on introduira le parametre p dans tous fes termes, qui n'ont point la dimenfion e par rapport aux variables x, y, z, u, &c., & qu'on les rende tous de cette même dimenfion e par rapport aux variables x, y, z, u, &c. & p, & on aura par le Theoreme premier $eF = Mx + Ny + Pz + Qu +$ &c. $+ Kp$.

Donc, fi on fait $dF = o$, on aura $Mdx + Ndy + Pdz + Qdu +$ &c. $+ Kdp = o$, & en divifant par M, coefficient de dx, on aura $dx + \frac{N}{M}dy + \frac{P}{M}dz + \frac{Q}{M}du +$ &c. $+ \frac{K}{M}dp = o$, ou, en fuppofant $\frac{N}{M} = \alpha$, $\frac{P}{M} = \beta$, $\frac{Q}{M} = \gamma$, $\frac{K}{M} = \pi$, on aura $dx + \alpha dy + \beta dz + \gamma du +$ &c. $+ \pi dp = o$, les coefficients α, β, γ, &c., π etant tous de dimenfion nulle par rapport aux variables x, y, z, u, &c., p. Si dans cette derniere equation on fait p conftant, ou $dp = o$, elle deviendra $dx + \alpha dy + \beta dz + \gamma du +$ &c. $= o$, les coefficients α, β, γ, &c. demeurant les mêmes.

DCIX.

Soit maintenant $dx + Ady + Bdz + Cdu +$ &c. $= o$ une equation, qu'on propose d'intégrer : les coefficients A, B, C, &c. etant des fonctions quelconques des variables x, y, z, u, &c. Il faut distinguer deux cas dans cette equation : dans le premier cas on suppose que les coefficiens A, B, C, &c. sont des fonctions homogenes de dimension nulle des variables x, y, z, u, &c., & dans ce cas la question se reduit a trouver une fonction V de ces mêmes variables, dont la différence $Mdx + Ndy + Pdz + Qdu +$ &c. divisée par le coefficient M de dx, ou $dx + \frac{N}{M}dy + \frac{P}{M}dz + \frac{Q}{M}du +$ &c., soit $= dx + Ady + Bdz + Cdu +$ &c.; on aura donc $A = \frac{N}{M}$, $B = \frac{P}{M}$, $C = \frac{Q}{M}$, &c., & la différence $Mdx + Ndy + Pdz + Qdu +$ &c. $= Mdx + MAdy + MBdz + MCdu +$ &c. $= dV$. M est une fonction homogene des variables x, y, z, u, &c., qui est inconnüe. Supposant que la dimension inconnüe de la fonction V soit e, on aura par le Theoreme premier $eV = Mx + MAy + MBz + MCu +$ &c.; donc $\frac{dV}{eV} = \frac{1}{e} \cdot \frac{dV}{V} =$

$\frac{1}{x+Ay+Bz+Cu+\&c.}dx+\frac{A}{x+Ay+Bz+Cu+\&c.}dy$
$+\frac{B}{x+Ay+Bz+Cu+\&c.}dz+\frac{C}{x+Ay+Bz+Cu+\&c.}du$
$+\&c.$, &, en intégrant de part & d'autre par les methodes données precedemment, on aura $\frac{1}{e}L.V=$
$S.\left(\frac{1}{x+Ay+Bz+CV+\&c.}dx+\frac{A}{x+Ay+Bz+Cu+\&c.}dy+\&c.\right)$.
Lorsqu'on aura trouvé par cette intégration la valeur de V, on la fera $=c$ constante arbitraire, & le Probleme sera resolu. Car si on fait $V=c$, on aura $dV=o=Mdx+MAdy+MBdz+MCdu+\&c.$, & en divisant par M, on retrouvera l'equation proposée $dx+Ady+Bdz+Cdu+\&c.=o$. Si la dimension e etoit nulle, on auroit $x+Ay+Bz+Cu+\&c.=o$, par l'equation $eV=Mx+MAy+MBz+MCu+\&c.$

Dans le second cas on suppose que les coefficients A, B, C, &c. dans l'equation proposée $dx+Ady+Bdz+Cdu+\&c.$ ne sont point des fonctions homogenes de dimension nulle des variables x, y, z, u, &c. Mais en introduisant le parametre p dans ces fonctions, on pourra toujours les rendre homogenes, & de dimension nulle par rapport aux variables x, y, z, u, &c., & au parametre p. Alors l'equation proposée sera transformée en une autre de la forme $dx+\alpha dy$
$+\beta dz$

$+\beta dz + \gamma du + \&c. = o$, dans laquelle les coefficients α, β, γ, &c. sont des fonctions homogenes de dimension nulle des variables x, y, z, u, &c., & de p, & la question se reduira a trouver une fonction F des mêmes variables, dont la difference $Mdx + Ndy + Pdz + Qdu + \&c. + Kdp$, divisée par M coefficient de dx, ou $dx + \frac{N}{M}dy + \frac{P}{M}dz + \frac{Q}{M}du + \&c. + \frac{K}{M}dp$, soit $= dx + \alpha dy + \beta dz + \gamma du + \&c. + \pi dp$, en supposant $\pi = \frac{K}{M}$; & en faisant p constante, ou $dp = o$, cette quantité $dx + \frac{N}{M}dy + \frac{P}{M}dz + \frac{Q}{M}du + \&c.$ soit $= dx + \alpha dy + \beta dz + \gamma du + \&c.$, on aura donc $\alpha = \frac{N}{M}$, $\beta = \frac{P}{M}$, $\gamma = \frac{Q}{M}$, &c., & $\pi = \frac{K}{M}$; & la difference $Mdx + Ndy + Pdz + Qdu + \&c. + Kdp$ sera $Mdx + M\alpha dy + M\beta dz + M\gamma du + \&c. + M\pi dp = dF$. M est une fonction homogene des variables x, y, z, u, &c., & de p, qui est inconnüe, & π est aussi une fonction inconnüe de dimension nulle des mêmes quantités.

En supposant que la dimension de la fonction F soit $= e$, on aura par le Theoreme premier $eF =$

$Mx + M\alpha y + M\beta z + M\gamma u + \&c. + M\pi p$; donc $\frac{dF}{eF} = \frac{1}{e} \cdot \frac{dF}{F} =$

$$\frac{1}{x + \alpha y + \beta z + \gamma u + \&c. + \pi p} dx +$$

$$\frac{\alpha}{x + \alpha y + \beta z + \gamma u + \&c. + \pi p} dy +$$

$$\frac{\beta}{x + \alpha y + \beta z + \gamma u + \&c. + \pi p} dz +$$

$$\frac{\gamma}{x + \alpha y + \beta z + \gamma u + \&c. + \pi p} du + \&c. +$$

$$\frac{\pi}{x + \alpha y + \beta z + \gamma u + \&c. + \pi p} dp,$$

ou en faiſant $x + \alpha y + \beta z + \gamma u + \&c. + \pi p = \theta$, $\frac{1}{e} \cdot \frac{dF}{F} = \frac{1}{\theta} dx + \frac{\alpha}{\theta} dy + \frac{\beta}{\theta} dz + \frac{\gamma}{\theta} du + \&c. + \frac{\pi}{\theta} dp$, &, en intégrant de côté, & d'autre, $\frac{1}{e} \cdot L. F = S. \left(\frac{1}{\theta} dx + \frac{\alpha}{\theta} dy + \frac{\beta}{\theta} dz + \frac{\gamma}{\theta} du + \&c. + \frac{\pi}{\theta} dp\right)$. Lorſqu'on aura trouvé par cette intégration la valeur de la fonction F, on la fera $= c$ conſtante arbitraire, & le Probleme ſera reſolu.

Mais π etant une fonction inconnuë des variables x, y, z, u, &c., p, on ne peut trouver l'intégrale precedente, ſi l'on n'a auparavant la valeur de cette fonction π. Il ne s'agit donc plus que de trouver cette valeur de π.

Si on fuppofoit que la dimenfion e de F fut $=o$, on auroit $\pi = \frac{-x - \alpha y - \beta z - \gamma u - \&c.}{p}$, par l'equation $eF = Mx + M\alpha y + M\beta z + M\gamma u + \&c. + M\pi p$, mais cette valeur de π, rendant θ, ou $x + \alpha y + \beta z + \gamma u + \&c. + \pi p = o$, ne peut nous fervir, & il faut neceffairement en trouver quelqu'autre.

DCX.

On la trouvera par le quatrieme des Theoremes, que nous allons demontrer.

THEOREME II. Suppofé que V foit une fonction des variables x, y, z, u, &c., on aura $\frac{d.S.Vdx}{dy} = S.\frac{dV}{dy}dx$, c'eft a dire, que la différence de $S.Vdx$ prife en ne faifant varier que y, & divifée par dy, eft egale a l'intégrale du produit de la différence dx multipliée par la différence dV prife en ne faifant varier que y, & divifée par dy. Nous avons demontré cy-deffus ce Theoreme. (CCCXXXI).

DCXI.

THEOREME III. V etant toujours une fonction des variables x, y, z, u, &c., & fa différence $dV =$

$Mdx + Ndy + Pdz + Qdu + \&c.$, on aura les equations de condition $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, $\frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}$, $\frac{dM}{du} = \frac{dQ}{dx}$, $\frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}$, $\frac{dN}{du} = \frac{dQ}{dy}$, $\frac{dP}{du} = \frac{dQ}{dz}$ &c. . Nous avons aussi demontré ce Theoreme. (CCCXXXII.)

DCXII.

THEOREME IV. Dans la même supposition, en faisant $N = AM$, $P = BM$, $Q = CM$, &c., & par consequent $dV = Mdx + AMdy + BMdz + CMdu + \&c.$, on aura les equations de condition suivantes.

1° Pour trois termes $Mdx + AMdy + BMdz$ on aura l'equation

$$A\frac{dB}{dx} - B\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} = 0.$$

2° Donc pour quatre termes $Mdx + AMdy + BMdz + CMdu$, on aura ces trois equations

$$A\frac{dB}{dx} - B\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} = 0$$

$$A\frac{dC}{dx} - C\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{du} - \frac{dC}{dy} = 0$$

$$B\frac{dC}{dx} - C\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{du} - \frac{dC}{dz} = 0.$$

3° On trouvera de même les conditions pour cinq termes de la différence de V, pour six, &c. Nous avons demontré cy-dessus ce Theoreme. On va voir

dans le Probleme ſuivant la maniere de trouver la fonction π par le Theoreme precedent.

DCXIII.

PROBLEME. Intégrer l'equation $dx + \alpha dy = o$, dans laquelle α eſt une fonction homogene de dimenſion nulle de x, de y, & de p, ou une fraction donnée, dont le numerateur, & le denominateur ſont des fonctions homogenes & de même dimenſion de x, de y, & de p.

SOLUTION. La queſtion ſe reduit a trouver une fonction φ de x, de y, & de p, dont la différence, en faiſant p conſtant, diviſée par le coefficient de dx, ſoit $dx + \alpha dy = o$ (Art. DCVIII.). Si l'on n'eût pas fait $dp = o$, on auroit eû $dx + \alpha dy + \pi dp = o$, π etant une fonction homogene de dimenſion nulle de x, de y, & de p, qui eſt inconnüe; & ſi l'on n'eût pas diviſé par la fonction μ, qui multiplioit dx, on auroit eû $\mu dx + \mu \alpha dy + \mu \pi dp = d\varphi$ (Art. DCVIII.), μ etant une fonction homogene de x, de y, & de p, qui eſt auſſi inconnüe.

En ſuppoſant que la dimenſion de φ etoit $= e$, nous aurons $e\varphi = \mu x + \mu \alpha y + \mu \pi p$; donc $\frac{1}{e} \cdot \frac{d\varphi}{\varphi} =$

$$\frac{1}{x + \alpha y + \pi p} dx + \frac{\alpha}{x + \alpha y + \pi p} dy + \frac{\pi}{x + \alpha y + \pi p} dp, \&,$$

en intégrant, $\frac{1}{e} . L. \varphi = S. \left(\frac{1}{x + \alpha y + \pi p} dx + \frac{\alpha}{x + \alpha y + \pi p} dy \right.$ $\left. + \frac{\pi}{x + \alpha y + \pi p} dp \right)$. Il ne s'agit donc plus que d'avoir la fonction π, & nous savons, par le Theoreme IV., qu'a cause de l'equation $\mu dx + \mu \alpha dy + \mu \alpha dp = d\varphi$, cette fonction doit être telle, que $\alpha \frac{d\pi}{dx} - \pi \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dp}$ $- \frac{d\pi}{dy} = o$.

Pour trouver la valeur de π par cette equation, considerons plus particulierement que nous n'avons encore fait, de quelle maniere on peut concevoir qu'on est arrivé de la fonction φ a l'equation $dx + \alpha dy = o$. On a différentié en faisant tout varier, & on a eû $A dx + B dy + C dp = d\varphi$; on a reduit les trois fonctions A, B, C au même denominateur D, & on a eû $\frac{1}{D}(E dx + F dy + G dp) = d\varphi$. On a divisé les fonctions E, F, G par leur plus grand facteur commun H, & on a eû $\frac{H}{D}(I dx + K dy + L dp) = d\varphi$. On a encore divisé les fonctions I & K par leur plus grand facteur commun Q, & on a eû $\frac{H}{D}(MQ dx +$ $NQ dy + L dp) = d\varphi$; on a fait $dp = o$, & on a eû $dx + \frac{N}{M} dy = o$. Donc, puisque ces deux dernie-

res equations doivent être les mêmes que les deux $dx + \alpha dy + \pi dp = o$, & $dx + \alpha dy = o$, on aura $\alpha = \frac{N}{M}$, & $\pi = \frac{L}{QM}$, N & M etant des fonctions homogenes de même dimension de x, de y, & de p; L & QM etant aussi des fonctions homogenes & de même dimension des mêmes quantités.

En substituant ces valeurs de α, & de π dans l'equation de condition $\alpha \frac{d\pi}{dx} - \pi \frac{d}{dx} + \frac{d\alpha}{dp} - \frac{d\pi}{dy} = o$, nous aurons $NQ\frac{dL}{dx} - NL\frac{dQ}{dx} - QL\frac{dN}{dx} + Q^2 \times \left(M\frac{dN}{dp} - N\frac{dM}{dp}\right) - MQ\frac{dL}{dy} + LM\frac{dQ}{dy} + QL\frac{dM}{dy} = o$.

La fonction α etant donnée, on aura les fonctions N & M, en faisant N egal au numerateur, & M egal au denominateur de la fraction α. Si de plus la fonction Q etoit donnée, on auroit très-aisément la fonction L par la methode des indeterminées. L'on prendroit pour L une fonction homogene de x, de y, & de p, de même dimension que QM la plus generale qu'il seroit possible, & avec des coefficients indeterminés; on substitueroit cette valeur de L dans l'equation de condition, qu'on vient de trouver entre M, N, L, Q, & l'on determineroit les coefficients de L par des

equations du premier degré, en satisfaisant a cette equation de condition supposée identique, comme on le verra dans l'exemple que nous rapporterons plus bas. Mais comme la fonction Q est inconnüe de même que L, l'on fera 1° $Q = 1$, on aura l'equation de condition $N\frac{dL}{dx} - L\frac{dN}{dx} + M\frac{dN}{dp} - N\frac{dM}{dp} - M\frac{dL}{dy} + L\frac{dM}{dy} = 0$. 2° $Q = p$, on aura en faisant $dQ = dp = 0$ dans l'equation generale de condition, & divisant par p, $N\frac{dL}{dx} - L\frac{dN}{dx} + p\left(M\frac{dN}{dp} - N\frac{dM}{dp}\right) - M\frac{dL}{dy} + L\frac{dM}{dy} = 0$. 3° S'il n'entre aucun radical dans N, ny dans M, l'on fera $Q = ap + bx + cy$. 4° $Q = ap^2 + bpx + cpy + dx^2 + exy + fy^2$. 5° $Q = ap^3 + bp^2x +$ &c., & l'on determinera les coefficients de L, comme si ceux de Q etoient donnés; ensuite l'on verra quels doivent être les coefficients de Q, pour qu'il n'y ait pas de contradiction dans ceux de L.

S'il entre des radicaux dans les fonctions N, M, après avoir essayé les hypotheses de $Q = 1$, & de $Q = p$, qui sont très-generales, l'on fera entrer ces mêmes radicaux dans les valeurs successives de Q, & de L, comme autant de nouvelles variables, & de la maniere la plus generale qu'il sera possible, sur quoi on peut voir les Memoires de M.r Fontaine page 35.

DCXIV.

DCXIV.

EXEMPLE. Soit, par exemple, $\alpha = \frac{ap + bx + cy}{\alpha' p + \beta' x + \gamma' y}$, & l'equation propoſée $dx + \frac{ap + bx + cy}{\alpha' p + \beta x + \gamma' y} dy = o$ en ſuppoſant $Q = 1$, on aura $N = ap + bx + cy$, $M = \alpha' p + \beta' x + \gamma' y$, $L = Ap + Bx + Cy$, les coefficients A, B, C etant indeterminés, $\frac{dN}{dx} = b$, $\frac{dN}{dp} = a$, $\frac{dM}{dy} = \gamma'$, $\frac{dM}{dp} = \alpha'$, $\frac{dL}{dx} = B$, $\frac{dL}{dy} = C$, & en ſubſtituant dans l'equation de condition $N \frac{dL}{dx} - L \frac{dN}{dx} + M \frac{dN}{dp} - N \frac{dM}{dp} - M \frac{dL}{dy} + L \frac{dM}{dy} = o$, nous aurons $(aB - \alpha' C - bA + \gamma' A) p + (-b\alpha' - \beta' C + \gamma' B + a\beta') x + (c\beta - c\alpha' + a\gamma' - bC) y = o$; equation qui doit être identique: donc $aB - \alpha' C - bA + \gamma' A = o$; $-b\alpha' + \beta' a - \beta' C + \gamma' B = o$; $cB - c\alpha' + a\gamma' - bC = o$; en comparant ces equations, on trouve $A = \frac{-a(b\alpha' - a\beta')}{c\beta' - b\gamma'}$; $B = \frac{\beta'(c\alpha' - a\gamma') - b(b\alpha' - a\beta')}{c\beta' - b\gamma'}$; $C = \frac{\gamma'(c\alpha' - a\beta') - c(b\alpha' - a\beta')}{c\beta' - b\gamma'}$ donc en ſubſtituant ces valeurs dans $Ap + Bx + Cy = L$, & enſuite les valeurs de L, & de M dans

$\frac{L}{QM} = \frac{L}{M} = \pi$, on aura $\pi =$

$$\frac{-a(b\alpha' - a\beta')p + [\beta'(c\alpha' - a\gamma') - b(b\alpha' - a\beta')]x + [\gamma'(c\alpha' - a\beta') - c(b\alpha' - a\beta')]y}{(c\beta' - b\gamma')(\alpha' p + \beta' x + \gamma' y)}.$$

Si l'equation proposée etoit $dx + \frac{ap^2 + bpx + cpy + d'x^2 + exy}{\alpha' p^2 + \beta' px + \gamma' py - d'xy - ey^2} dy = o$, en supposant $Q = p$, on auroit $N = ap^2 + bpx + cpy + d'x^2 + exy$; $M = \alpha' p^2 + \beta' px + \gamma' py - d'xy - ey^2$; $L = Ap^3 + Bp^2 x + Cp^2 y + Dpx^2 + Epxy + Fpy^2 + Gx^3 + Hx^2 y + Ixy^2 + Ky^3$; $\frac{dN}{dx} = bp + 2d'x + cy$; $\frac{dN}{dp} = 2ap + bx + cy$; $\frac{dM}{dy} = \gamma' p - d'x - 2ey$; $\frac{dM}{dp} = 2\alpha' p + \beta' x + \gamma' y$; $\frac{dL}{dx} = Bp^2 + 2Dpx + Epy + 3Gx^2 + 2Hxy + Iy^2$; $\frac{dL}{dy} = Cp^2 + Epx + 2Fpy + Hx^2 + 2Ixy + 3Ky^2$; & en substituant ces valeurs dans l'equation de condition $N\frac{dL}{dx} - L\frac{dN}{dx} + pM\frac{dN}{dp} - pN\frac{dM}{dp} - M\frac{dL}{dy} + L\frac{dM}{dy} = o$, l'on aura une equation, qu'on regardera comme identique, & par laquelle on determinera les coefficients A, B, C, D, E, &c. de L,

on aura donc les valeurs de Q, de M, & de L, & par consequent celle de $\pi = \frac{L}{QM}$.

Ce que nous avons dit jusqu'a present dans ce Chapitre, appartient a la premiere methode de M.r Fontaine, sur laquelle nous ne nous etendrons pas davantage: ce que nous venons de dire etant suffisant pour comprendre dans l'Auteur même ce qui regarde cette premiere methode.

DCXV.

Il faut voir dans l'Ouvrage même de M.r Fontaine l'application ingénieuse que ce sçavant Auteur fait de cette premiere methode aux equations différentielles des ordres supérieurs. Quant a la seconde methode, il a donné lui même une introduction. On ne peut rien faire de mieux que de la lire avec beaucoup d'attention, & la plume a la main. Elle contient des verités fondamentales, & elementaires sur les rapports generaux des equations intégrales a leurs différentielles. Nous en parlerons après avoir etabli les propositions suivantes, qui pourront repandre quelque lumiere sur toute cette matiere.

1.° Lorsqu'on parle d'equations, de fonctions, de radicaux, de denominateurs, de puissances, &c., on entend toujours des quantités qui contiennent une, ou

plusieurs variables, a moins qu'on n'avertisse du contraire.

2° Les expressions $A1$, $A2$, $A3$, &c. $a1$, $a2$, $a3$, &c., $b1$, $b2$, $b3$, &c. ont la même signification que celles-cy, qui sont moins commodes A', A'', A''', &c., a', a'', a''' &c..

3° On prend ordinairement la lettre p pour designer l'unité indeterminée; & par ce qu'on ne change point la valeur d'une quantité en la multipliant, ou en la divisant par l'unité, on se sert de p, & de ses puissances pour conserver l'homogeneité partout où l'on en a besoin.

4° On appelle equation algebrique, rationelle, & entiere toute equation différentielle, ou intégrale, qui ne contient ny fonctions transcendantes, ny radicaux, ny denominateurs.

5° Une equation quelconque etant proposée, on peut toujours la delivrer de denominateurs. On n'a pour cela qu'a reduire toutes ses parties en fractions de même denomination, & effacer ensuite le denominateur commun a toute l'equation. Par exemple, si l'equation proposée etoit $adx + \frac{bxdy^2}{pdx} - \frac{cydx^2}{pdy} = o$,

on la reduiroit a celle-cy $\frac{apdx^2dy + bxdy^3 - cydx^3}{pdxdy} = o$,

& on auroit $apdx^2dy + bxdy^3 - cydx^3 = o$.

6°. Si l'equation proposée renferme des puissances negatives, c'est a dire des puissances, dont les exposans sont negatifs, on pourra l'en delivrer. Car en faisant passer ces puissances negatives dans les denominateurs, on les rendra positives, & ensuite on pourra debarasser l'equation de denominateurs.

7°. Si une equation contient des radicaux, on pourra l'en delivrer dans quelques Cas, sans augmenter le nombre des variables, & toujours, en egalant chaque radical a une nouvelle variable.

8°. Si elle contient des fonctions transcendantes, ou des intégrales sous le signe d'intégration, on pourra toujours l'en debarasser en egalant ses fonctions où ces intégrales a de nouvelles variables, & quelquefois, sans introduire de nouvelles variables, en différentiant toute l'equation. Par exemple, si l'equation proposée etoit $adxS.ydx - bxxdy = o$, on auroit $S.ydx = \frac{bxxdy}{adx}$, & différentiant, en faisant dx constante, on auroit $ydx = \frac{2bxdxdy + bxxddy}{adx}$, & $aydx^2 - 2bxdxdy - bxxddy = o$.

9°. Il n'y a point d'equations finies, algebriques, rationelles, entieres, & homogenes, qui ne soient contenües dans ces suites prolongées a l'infini.

PREMIERE SUITE.

$Ap + Bx = o.$

$Ap^2 + Bpx + Cx^2 = o.$

$Ap^3 + Bp^2x + Cpxx + Dpx^3 = o.$

$Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + Ex^4 = o.$

&c. a l'infini.

SECONDE SUITE.

$Ap + Bx + Cy = o.$

$Ap^2 + Bpx + Cpy + Dx^2 + Exy + Fy^2 = o.$

$Ap^3 + Bp^2x + Cp^2y + Dpx^2 + Epxy + Fpy^2 + Gx^3$
$+ Hx^2y + Ixy^2 + Ky^3 = o.$

$Ap^4 + Bp^3x +$ *&c.* $= o.$

&c. a l'infini.

TROISIEME SUITE.

$Ap + Bx + Cy + Dz = o.$

$Ap^2 + Bpx + Cpy + Dpz + Ex^2 + Fxy + Gy^2 +$
$Hxz + Iyz + Kz^2 = o.$

$Ap^3 + Bp^2x +$ *&c.* $= o.$

&c. a l'infini.

QUATRIEME SUITE &c.

&c. &c. &c. a l'infini.

Les coefficients A, B, C, D, E, F, *&c.* deſignent des conſtantes indeterminées, ou zero.

10° Si on prend ſucceſſivement toutes les différences premieres, ſecondes, troiſiemes, &c. de toutes les equations de chaque ſuite, il eſt evident qu'on aura toutes les equations différentielles algebriques, rationelles, & entieres, qui auront pour intégrales des equations finies, algebriques, rationelles, & entieres, & que ces intégrales ſe trouveront dans ces ſuites. Donc, ſi on propoſe d'intégrer une equation différentielle quelconque, qui ait par elle même, ou par reduction, la forme requiſe, c'eſt a dire, qui ſoit algebrique, rationelle, & entiere; ſi elle a pour intégrale une equation algebrique, rationelle, & entiere, on trouvera cette intégrale en comparant l'equation différentielle propoſée avec les formules generales des différentielles des ſuites, qui ſont du même ordre, & du même nombre des variables, que la propoſée; & ſi l'on ne trouve pas dans les différentielles des ſuites de formule, qui puiſſe être comparée exactement avec la différentielle propoſée, on pourra multiplier ſucceſſivement cette propoſée par différentes fonctions generales, algebriques, rationelles, & entieres des variables qu'elle contient, juſqu'a ce qu'elle acquiere une forme, qui puiſſe être comparée exactement avec quelqu'une des formules différentielles des ſuites.

11° Au reſte il faut ſe ſouvenir que l'intégrale finie d'une equation différentielle d'un ordre quelconque

doit renfermer, pour être complette, autant de conſtantes arbitraires, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de cet ordre. Ainſi les equations des ſuites precedentes ſont toutes des intégrales complettes de leurs différentielles du premier ordre. Car en prenant la premiere différence de chacune de ces equations, le premier terme conſtant Ap, ou Ap^2, ou Ap^3, &c. s'evanoüit, & ne ſe trouve point dans ſa différentielle du premier ordre; par conſequent il devient une conſtante arbitraire dans l'intégrale de cette différentielle. De même ſi, en prenant les ſecondes différences de chaque equation des ſuites, on ſuppoſe qu'une des premieres différences des variables x, y, z, u, &c., par exemple, dx, ſoit conſtante, les equations des ſuites ſeront toutes des intégrales complettes de leurs différentielles du ſecond ordre, par ce que la ſeconde différentiation, en ſuppoſant dx conſtante, ou $ddx=o$, fera diſparoitre le ſecond terme Bpx, ou Bp^2x, ou Bp^3x, &c. dans la différentielle du ſecond ordre; & l'intégrale de cette différentielle contiendra les deux conſtantes arbitraires A & B, qui ne ſe trouvent point dans la ſeconde différence de cette intégrale. Dans la même ſuppoſition de dx conſtante, les equations des ſuites ſeront des intégrales complettes de leurs troiſiemes différences, par ce que la troiſieme différentiation fera diſparoitre un troiſieme coefficient conſtant dans la différentielle du

troiſie-

troisieme ordre. Par exemple, si l'on prend successivement la premiere, la seconde, & la troisieme différence de l'equation de la seconde suite $Ap^2 + Bpx + Cpy + Dx^2 + Exy + Fy^2 = o$, on aura pour sa différentielle du premier ordre $Bpdx + Cpdy + 2Dxdx + Exdy + Eydx + 2Fydy = o$, dans laquelle le premier terme Ap^2 de l'intégrale a disparû. Donc, si on vouloit intégrer la différentielle $dx + 2dy - 2xdx - 3ydy = o$; en la comparant avec la formule generale $Bpdx + Cpdy + 2Dxdx + Eydx + Exdy + 2Fydy = o$, on auroit $Bp = 1$, $Cp = 2$, $2D = -2$, $E = o$, $2F = -3$, & l'intégrale feroit $Ap^2 + x + 2y - x^2 - \frac{3}{2}y^2 = o$, dans laquelle A est une constante arbitraire. La différentielle generale du second ordre, en faisant dx constante, fera $Cpddy + 2Ddx^2 + 2Edydx + Exddy + 2Fdy^2 + 2Fyddy = o$, dans laquelle le coefficient B a disparû; & si on vouloit intégrer la différentielle du second ordre $dx^2 + 2dy^2 + 2yddy = o$, on auroit $C = o$, $2D = 1$, $E = o$, $2F = 2$, & l'intégrale finie feroit $Ap^2 + Bpx + \frac{1}{2}x^2 + yy = o$, dans laquelle A & B sont deux constantes arbitraires. La différentielle generale du troisieme ordre, en faisant dx constante, fera $Cpd^3y + 3Edxddy + Exd^3y + 6Fdyddy + 2Fyd^3y = o$, dans laquelle les trois

coefficients constans A, B, & D ont disparû : on trouvera donc trois constantes arbitraires dans l'intégrale finie. Mais si l'on prend les différences, qui surpassent le troisieme ordre, même en faisant dx constante, on trouvera que leurs intégrales finies, dans les suites precedentes, ne feront que des intégrales particulieres, ou incomplettes de ces différentielles; & en general si on ne prend aucune différence premiere des variables x, y, z, u, &c. pour constante, les equations finies des suites ne feront que des intégrales incomplettes de toutes leurs différentielles supérieures au premier ordre.

DCXVI.

On comprend, par ce que nous venons de dire, que c'est pour avoir toujours des intégrales complettes, que M.r Fontaine dans son introduction a la seconde methode suppose, que dans la seconde suite d'equations, qui doivent être les intégrales finies des equations différentielles entre le parametre p, & les variables x, y, les coefficients constants A, B, C, D, E, F, &c. designent des fonctions d'un nombre arbitraire n, s'il s'agit d'une equation aux premieres différences ; de deux nombres arbitraires n, m, s'il s'agit d'une equation aux secondes différences; de trois nombres arbitraires n, m, l, s'il s'agit d'une equation aux troisiemes différences, &c. Voyons maintenant dans l'intro-

duction même de M.r Fontaine l'usage, qu'il fait de ces equations de la seconde suite, & des suppositions precedentes.

Prenez une des formules precedentes, celle du premier degré, ou celle du second, ou celle du troisieme, &c. Substituez au lieu des coefficients indeterminés A, B, C, D, E, F, *&c.* des fonctions de n a vôtre choix, vous aurez une equation, qui sera l'intégrale d'une equation aux premieres différences. Pour avoir cette equation aux premieres différences, dont vous avez l'intégrale, différentiez cette intégrale, vous aurez deux equations: chassez en n, & l'equation, qui vous restera entre p, x, y, dx, dy, sera l'equation aux premieres différences, dont vous aurez l'intégrale.

Prenez, par exemple, la formule $Ap + Bx + Cy = o$, & faites $A = 1 - n$, $B = 2$, $C = \frac{2 - 5n}{n}$, on aura l'equation $(1 - n)p + 2x + \frac{2 - 5n}{n}y = o$, qui sera l'intégrale d'une equation aux premieres différences. Pour avoir l'equation aux premieres différences, dont c'est là l'intégrale, on différentie cette intégrale; on aura $2ndx + (2 - 5n)dy = o$, &, en chassant n, on aura l'equation aux premieres différences $3pdy^2 + 10xdy^2 - 10ydxdy - 2pdxdy - 4xdxdy + 4ydx^2 = o$, dont l'intégrale est $(1 - n)p + 2x + \frac{2 - 5n}{n}y = o$.

Prenez une des formules precedentes: mettez dans cette formule pour A, B, C, D, E, F, &c. des fonctions de n, & de m, telles que vous voudrez, & vous aurez une equation, qui sera l'intégrale d'une equation aux secondes différences. Pour avoir cette equation aux secondes différences, dont vous avez l'intégrale, différentiez cette intégrale deux fois, vous aurez trois equations: chassez en les nombres n, & m, & l'equation, qui vous restera entre p, x, y, dx, dy, ddy (on suppose dx constante), sera l'equation aux secondes différences, dont vous avez l'intégrale. Prenez, par exemple, cette formule-cy $Ap^2+Bpx+Cpy+Dx^2+Exy+Fy^2=0$, & faites $A=3$, $B=2n$, $C=n-m$, $D=0$, $E=3-2m$, $F=-nm$, vous aurez l'equation $3p^2+2npx+(n-m)py+(3-2m)xy-nmy^2=0$, qui sera l'intégrale d'une equation aux secondes différences. Pour avoir cette equation aux secondes différences, dont c'est là l'intégrale, différenciez-là deux fois, vous aurez $2npdx+(n-m)pdy+(3-2m)xdy+(3-2m)ydx-2nmydy=0$, & $(n-m)pddy+(3-2m)xddy+2(3-2m(dxdy-2nmyddy-2nmdy^2=0$: chassez les nombres n & m de ces trois equations, & l'equation, qui vous restera entre p, x, y, dx, dy, ddy sera celle, dont il s'agit.

Prenez encore une des formules precedentes: mettez dans cette formule au lieu de A, B, C, D, E, F, *&c.* des fonctions de n, de m, & de l, vous aurez une equation, qui sera l'intégrale d'une equation aux troisiemes différences. Pour avoir cette equation aux troisiemes différences, dont vous avez l'intégrale, différentiez cette intégrale trois fois, vous aurez quatre equations: chassez en les nombres n, m, l, & l'equation, qui vous restera entre p, x, y, dx, dy, ddy, d^3y, sera l'equation aux troisiemes différences, dont vous avez l'intégrale.

Pour avoir l'intégrale d'une equation différentielle donnée, il faudra donc que la formule, que l'on choisira, & que les valeurs, que l'on donnera aux coefficients A, B, C, D, E, F, *&c.* de cette formule en n, si c'est une equation aux premieres différences, qui soit donné; en n, & m, si c'est une equation aux secondes différences; en n, en m, & en l, si c'est une equation aux troisiemes différences, &c., soient telles, que l'on arrive de cette intégrale a l'equation différentielle proposée. De même que pour chaque intégrale il n'y a qu'une seule equation aux premieres, ou aux secondes, ou aux troisiemes différences, &c., dont elle soit l'intégrale: pour chaque equation aux premieres différences, il n'y a qu'une seule equation entre p, x, y, & n, qui en soit l'intégrale: pour chaque equation

aux fecondes différences, il n'y a qu'une feule equation entre p, x, y, n, & m, qui en foit l'intégrale: pour chaque equation aux troifiemes différences, il n'y a qu'une feule equatiou entre p, x, y, n, m, & l, qui en foit l'intégrale &c. Cette intégrale peut fe prefenter fous une infinité de formes différentes; mais ce fera toujours effentiellement la même equation.

Si vous avez l'intégrale d'une equation aux premieres différences, & que vous determiniez n, c'eft a dire, que vous faffiez, par exemple, $n = o$, ou $n = -3$, ou $n = 5$, *&c.*, l'equation, que vous aurez, ne fera pas l'intégrale de vôtre equation aux premieres différences, mais elle fera feulement un des cas de cette intégrale; & il en de même des intégrales des equations aux fecondes différences, de celles aux troifiemes, &c.; a chaque fois que l'on determine un, ou deux, ou trois, &c. des nombres n, m, l, *&c.*, l'equation, que l'on a, n'eft plus qu'un des cas de l'intégrale. Par exemple, fi vous faites $n = 1$ dans l'intégrale complette $n(1 - n)p + 2nx + (2 - 5n)y = o$ de l'equation aux premieres différences $3pdy^2 + 10xdy^2 - 10ydxdy - 2pdxdy - 4xdxdy + 4ydx^2 = o$, l'equation $2x - 3y = o$, que vous avez, ne fera pas l'intégrale de cette equation aux premieres différences, c'eft a dire, que l'equation différentielle $2dx - 3dy = o$ ne fera pas la même que cette equation aux

premieres différences $3pdy^2 + 10xdy^2 - 18ydxdy -$ &c. $= o$; mais l'equation $2x - 3y = o$ sera seulement un des cas de l'intégrale complette de l'equation aux premieres différences $3pdy^2 + 10xdy^2 -$ &c. $= o$; c'est a dire, que tirant de l'equation $2x - 3y = o$ la valeur d'une des variables, & substituant cette valeur pour la variable dans l'equation différentielle $3pdy^2 + 10xdy^2 -$ &c. $= o$, celle-cy deviendra identique. Car puisque $2x - 3y = o$, on aura $x = \frac{3}{2}y$, & $dx = \frac{3}{2}dy$; & substituant ces valeurs pour x, & pour dx dans l'equation différentielle $3pdy^2 + 10xdy^2 -$ &c. $= o$, elle deviendra $3pdy^2 + 15ydy^2 - 15ydy^2 - 3pdy^2 - yydy^2 + yydy^2 = o$, equation identique.

On peut encore observer icy que, pour chaque equation aux secondes différences, il y a deux intégrales aux premieres différences; car après avoir différentié une fois seulement l'intégrale d'une equation aux secondes différences, on pourra chasser le nombre m, ou le nombre n, & par consequent avoir une equation aux premieres différences, où il ne restera que n, & une autre, où il ne restera que m, & chacune de ces deux equations sera egalement l'intégrale de l'equation aux secondes différences, que l'on auroit en différentiant l'intégrale deux fois, & en chassant les deux nombres

m & n; que par la même raiſon pour chaque equation aux troiſiemes différences il y a trois equations aux ſecondes, qui en ſont les intégrales, ſçavoir, celle où il ne reſte que le nombre l, celle où il ne reſte que le nombre m, & celle où il ne reſte que le nombre n. Mais bornons nous quant a preſent aux equations aux premieres différences.

L'intégrale d'une equation aux premieres différences etant donnée, au lieu d'en deduire, comme nous venons de le faire, l'equation aux premieres différences dont elle eſt l'intégrale, nous pourrons ordonner cette intégrale par rapport a n, & avoir, en la reſolvant, n fonction nulle de p, de x, & de y, & en différentiant, avoir $dx + \alpha dy = o$. Par exemple, l'intégrale $n(1 - n)p + 2nx + (2 - 5n)y = o$ etant donnée, on peut l'ordonner par rapport a n, & avoir $nn - n . \frac{p + 2x - 5y}{p} = \frac{2y}{p}$, d'où l'on tire $n = \frac{p + 2x - 5y}{2p} \pm \frac{\sqrt{(p + 2x - 5y)^2 + 8py}}{2p}$, fonction de dimenſion nulle de p, de x, & de y; & en différentiant, on aura $2ndx + (2 - 5n)dy = o$, ou $dx + \alpha dy = o$, en faiſant $\alpha = \frac{2 - 5n}{2n}$, & en mettant a la place de n la valeur qu'on vient de trouver. Reſolvez l'equation que vous avez trouvé par le premier procedé, de maniere qu'a ſa

ſa place vous en ayez une autre, ou dx & dy ne ſoient qu'a la premiere dimenſion, cette equation ſera $dx+\alpha dy=o$, c'eſt a dire, preciſement la même que par le ſecond procedé.

Dans l'exemple precedent on avoit les deux equations $n(n-1)p+2nx+(2-5n)y=o$, & $2ndx+(2-5n)dy=o$. Par le premier procedé on a ſubſtitué dans le premiere equation la valeur de $n=\frac{2dy}{5dy-2dx}$ tirée de la ſeconde equation, & on a trouvé l'equation aux premieres différences $3pdy^2+10xdy^2-10ydxdy-2pdxdy-4xdxdy+4y^2dx^2=o$. Si l'on ordonne cette equation par rapport a dx, on aura en la reſolvant $dx+\alpha dy=o$. Car ſi, au lieu de ſubſtituer la valeur de $n=\frac{2dy}{5dy-2dx}$ dans l'equation $n(1-n)p+2nx+(2-5n)y=o$, comme on a fait dans le premier procedé, on ſubſtitue dans l'equation $n=\frac{2dy}{5dy-2dx}$ la valeur de n tirée de la premiere equation, il eſt evident qu'on doit avoir la même equation aux premieres différences $dx+\alpha dy=o$.

Si vous n'aviez pas fait $dp=o$, vous auriez eû $dx+\alpha dy+\left(\frac{-x-\alpha y}{p}\right)dp=o$ par le premier, & par le ſecond procedé. Car, ſi l'on n'eût pas fait $dp=o$, on auroit eû $dx+\alpha dy+\pi dp=o$, π etant une fonction de dimenſion nulle de p, de x, & de y, qui eſt incon-

nuë; & si l'on n'eût pas divisé par la fonction qui multiplioit dx, on auroit eû $\mu dx + \alpha\mu dy + \pi\mu dp = d\varphi$, μ etant encore une fonction inconnuë de p, de x, & de y, & φ une fonction inconnuë des mêmes quantités, qu'on peut supposer de dimension nulle, puis qu'on peut toujours multiplier ou diviser cette fonction par une puissance de p, qui la rende de dimension nulle. On aura donc par le premier Theoreme fondamental $\mu x + \alpha\mu y + \pi\mu p = o$, par consequent $x + \alpha y + \pi p = o$, & $\pi = \frac{-x-\alpha y}{p}$.

Soit donc $dx + \frac{N}{M}dy = o$ l'equation que l'on propose d'intégrer. Par N, & par M on entend deux fonctions de même dimension de p, de x, & de y, qui n'ont aucun facteur commun, & dont tous les termes sont homogenes, & composés de puissances positives. S'il n'entre aucun radical dans les fonctions N, M, c'est a dire, si l'equation différentielle proposée est renfermée dans l'une des formules suivantes

$$dx + \frac{b1p + b2x + b3y}{\beta1p + \beta2x + \beta3y}dy = o,$$

$$dx + \frac{b1p^2 + b2px + b3py + b4x^2 + b5xy + b6y^2}{\beta1p^2 + \beta2px + \beta3py + \beta4x^2 + \beta5xy + \beta6y^2}dy = o,$$

$$dx + \left\{\frac{b1p^3 + b2p^2x + b3p^2y + b4px^2 + b5pxy + b6py^2 + b7x^3 + b8x^2y + b9xy^2 + b10y^3}{\beta1p^3 + \beta2p^2x + \beta3p^2y + \beta4px^2 + \beta5pxy + \beta6py^2 + \beta7x^3 + \beta8x^2y + \beta9xy^2 + \beta10y^3}\right\}dy = o$$

&c. &c.

l'intégrale fera

$$n = \frac{a1p^2 + a2x + a3y}{\alpha 1p^2 + \alpha 2x + \alpha 3y}, \text{ ou}$$

$$n = \frac{a1p^2 + a2px + a3py + a4x^2 + a5xp + a6y^2}{\alpha 1p^2 + \alpha 2px + \alpha 3py + \alpha 4x^2 + \alpha 5xy + \alpha 6y^2}, \text{ ou}$$

$$n = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a1p^3 + a2p^2x + a3p^2y + a4px^2 + a5pxy +}{\alpha 1p^3 + \alpha 2p^2x + \alpha 3p^2y + \alpha 4px^2 + \alpha 5pxy +} \\ \dfrac{a6py^2 + a7x^3 + a8x^2y + a9xy^2 + a10y^3}{\alpha 6py^2 + \alpha 7x^3 + \alpha 8x^2y + \alpha 9xy^2 + \alpha 10y^3} \end{array} \right\}, \text{ ou}$$

$$n = \frac{a1p^4 + \&c.}{\alpha 1p^4 + \&c.}, \text{ ou}$$

$$n = \frac{a1p^5 + \&c.}{\alpha 1p^5 + \&c.}, \text{ ou}$$

&c. &c.

S'il entre des radicaux dans les fonctions N, M, l'on fera entrer ces mêmes radicaux dans le numerateur, & dans le denominateur des valeurs fucceffives de n, & de la maniere la plus generale qu'il fera poffible.

Suppofons, par exemple, qu'il n'y ait qu'un feul radical dans l'equation différentielle propofée, & que ce radical foit $\sqrt{(ap^2 + bpx + cpy + d'x^2 + exy + fy^2)}$. On fait $z = \sqrt{(ap^2 + bpx + cpy + d'x^2 + exy + fy^2)}$, on aura $z^2 = ap^2 + bpx + cpy + d'x^2 + exy + fy^2$; $\frac{dz}{dx} = \frac{bp + 2dx + ey}{2z}$; $\frac{dz}{dy} = \frac{cp + ex + 2fy}{2z}$, la formule de l'equation propofée fera

$$dx + \frac{b1p + b2x + b3y + b4z}{\beta 1p + \beta 2x + \beta 3y + \beta 4z} dy = o, \text{ ou}$$

$$dx + \left\{ \begin{matrix} \dfrac{b1p^2 + b2px + b3py + b4pz + b5x^2 +}{\beta 1p^2 + \beta 2px + \beta 3py + \beta 4pz + \beta 5x^2 +} \\ \\ \dfrac{b6xy + b7xz + b8y^2 + b9yz}{\beta 6xy + \beta 7xz + \beta 8y^2 + \beta 9yz} \end{matrix} \right\} dy = o, \text{ ou}$$

&c. &c. &c.

& son intégrale sera

$$n = \frac{a1p + a2x + a3y + a4z}{\alpha 1p + \alpha 2x + \alpha 3y + \alpha 4z}, \text{ ou}$$

$$n = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{a1p^2 + a2px + a3py + a4pz + a5x^2 +}{\alpha 1p^2 + \alpha 2px + \alpha 3py + \alpha 4pz + \alpha 5x^2 +} \\ \\ \dfrac{a6xy + a7xz + a8y^2 + a9yz}{\alpha 6xy + \alpha 7xz + \alpha 8y^2 + \alpha 9yz} \end{matrix} \right\}, \text{ ou}$$

$$n = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{a1p^3 + a2p^2x + a3p^2y + a4p^2z +}{\alpha 1p^3 + \alpha 2p^2x + \alpha 3p^2y + \alpha 4p^2z +} \\ \\ \dfrac{a5px^2 + a6pxy + a7pxz + a8py^2}{\alpha 5px^2 + \alpha 6pxy + \alpha 7pxz + \alpha 8py^2} \\ \\ \dfrac{+ a9pyz + a10x^3 + a11x^2y + a12x^2z}{+ \alpha 9pyz + \alpha 10x^3 + \alpha 11x^2y + \alpha 12x^2z} \\ \\ \dfrac{+ a13xy^2 + a14xyz + a15y^3 + a16y^2z}{+ \alpha 13xy^2 + \alpha 14xyz + \alpha 15y^3 + \alpha 16y^2z} \end{matrix} \right\}, \text{ ou}$$

&c. &c. &c.

S'il entre plusieurs radicaux dans les fonctions N, M, on fera pour chaque radical ce qu'on vient de faire pour un seul. On pourra consulter pour le reste l'Ouvrage de M.r Fontaine, dont nous avons presque copié les paroles dans cet Article DCXVI., en les accompagnant cependant des eclaircissemens necessaires.

DCXVII.

Il ne nous reste plus qu'a donner une idée du Calcul Intégral de M.r le Marquis de Condorcet. Cet Ouvrage est divisé en deux Parties, dont la premiere traite des equations différentielles aux différences infiniment petites; la seconde considere les equations aux différences finies, & celles où une même variable egalée a une fonction de plusieurs autres, a eté successivement supposée varier avec chacune d'entr'elles. Nous ne parlerons que de la premiere Partie: elle est naturellement divisée en deux sections. M.r de Condorcet resout pleinement dans la premiere ce Probleme general: *Etant donnée une fonction ou equation différentielle de tel ordre que ce soit, & qui renferme tant de variables qu'on voudra, trouver les equations de condition, qui doivent avoir lieu, pour qu'elle puisse avoir une intégrale de l'ordre inférieur de l'unité, ou même une intégrale finie.* Car, selon la remarque de M.rs d'Alembert & Bezout, lorsqu'un Probleme est possible, c'est deja avoir fait un pas

utile vers sa solution, que d'avoir demontré que l'equation différentielle, qui l'exprime, admet une intégrale du degré immediatement inférieur. Mais il peut arriver souvent qu'une equation susceptible d'une pareille intégrale exprime une chose impossible, & par consequent n'admette point d'intégrale finie. C'est donc un travail fort utile, que de detérminer dans quel cas une equation proposée peut être amenée a une intégrale finie. Après qu'on s'est assuré qu'une equation différentielle proposée a une intégrale finie possible, il ne reste plus qu'a trouver cette intégrale, c'est le second Probleme general que M.r de Condorcet se propose de resoudre dans la seconde section.

DCXVIII.

Il reduit toutes ses recherches sur les equations de condition a sept Problemes, dont les quatre premiers roulent sur les fonctions, & les trois derniers sur les equations différentielles. Nous nous contenterons de donner un essai de sa methode, en rapportant la solution du premier Probleme avec quelques explications sur des difficultés de calcul, qui pourroient embarasser.

PROBLEME I. Trouver l'equation de condition qui doit avoir lieu, pour qu'une fonction différentielle d'un ordre quelconque de deux variables x, y, ou dx est supposé constant, soit la différentielle exacte d'une

fonction des mêmes variables, d'un ordre moins elevé d'une unité.

SOLUTION. Soit V la fonction proposée, B la fonction de l'ordre inférieur, dont V doit être la différence. On fait dans V & dans B, $dx=p, dy=p', dp=o$ a cause de dx constante, $ddy=dp'=q'$, $d^3y=d^2p'=dq'=r'$, $d^4y=d^3p'=d^2q'=dr'=s'$, & ainsi de suite on aura V & B fonctions de x, y, p, p', q', r', s', &c., la derniere de ces lettres p', q', r', s', &c., qui se trouve dans V, ne devant pas se trouver dans B, par ce que B est d'un ordre inférieur a V. Par exemple, si $s'=d^4y$ est la derniere de ces lettres qui se trouvent dans V, $r'=d^3y$ sera la derniere lettre qui se trouve dans B, puisque, V etant une différentielle du quatrieme ordre, B ne sera que du troisieme par la supposition du Probleme. Cette substitution des lettres p, p', q', r', s', &c., au lieu des différences dx, dy, d^2y, d^3y, d^4y, &c., donnera le moyen de distinguer les p, p', q', r', s', &c., qui se trouvent dans B, de ceux que la différentiation introduit dans dB.

Cela posé, & en différentiant, suivant la nouvelle maniere, on aura, par la supposition, $V=dB=\frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dy}dy + \frac{dB}{dp'}dp' + \frac{dB}{dq'}dq' + \frac{dB}{dr'}dr' +$ &c., & , en mettant dans cette valeur de V pour dx, dy, dp',

dq', dr', &c. leurs valeurs, on aura $V = \frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dp'}q' + \frac{dB}{dq'}r' + \frac{dB}{dr'}s' +$ &c., forme que doit necessairement avoir V, pour être la différentielle exacte de la fonction B.

Pour parvenir a tirer de là l'equation de condition, qu'on cherche, on différentie les deux membres de l'equation cy-dessus. Le premier, en différentiant a l'ordinaire, donne $dV = Ndx + N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + S'ds' +$ &c., ou les coefficients N, N', P', Q', R', S', &c. font des fonctions connuës des quantités x, y, p, p', q', r', s', &c., que contient la fonction donnée V. Le seconde membre, en différentiant suivant la nouvelle maniere, donne $d\left(\frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dp'}q' + \frac{dB}{dq'}r' + \frac{dB}{dr'}s' + \text{\&c.}\right) = \left(\frac{ddB}{dx^2}p + \frac{ddB}{dxdy}p' + \frac{ddB}{dxdp'}q' + \frac{ddB}{dxdq'}r' + \frac{ddB}{dxdr'}s' + \text{\&c.}\right)dx + \left(\frac{ddB}{dydx}p + \frac{ddB}{dy^2}p' + \frac{ddB}{dydp'}q' + \frac{ddB}{dydq'}r' + \frac{ddB}{dydr'}s' + \text{\&c.}\right)dy + \left(\frac{dB}{dy} + \frac{ddB}{dp'dx}p + \frac{ddB}{dp'dy}p' + \frac{ddB}{dp'^2}q' + \frac{ddB}{dp'dq'}r' + \frac{ddB}{dp'dr'}s' + \text{\&c.}\right)dp' + \left(\frac{dB}{dp'} + \frac{ddB}{dq'dx}p + \frac{ddB}{dq'dy}p' +\right.$

$\frac{ddB}{dq'dp'}q' + \frac{ddB}{dq'^2}r' + \frac{ddB}{dq'dr'}s' + \&c.) dq' + (\frac{dB}{dq'} + \frac{ddB}{dr'dx}p$
$+ \frac{ddB}{dr'dy}p' + \frac{ddB}{dr'dp'}q' + \frac{ddB}{dr'dq'}r' + \frac{ddB}{dr'^2}s' + \&c.) dr' +$
$(\frac{dB}{dr'} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) ds' + \&c. \&c.$, equation, que nous deſignerons par (G).

La différence du ſecond membre $\frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dp'}q' + \frac{dB}{dq'}r' + \frac{dB}{dr'}s' + \&c.$, ſe trouve en prenant en particulier la différence de chaque terme de ce ſecond membre. 1° En ne faiſant varier que x. 2° En ne faiſant varier que y. 3° En ne faiſant varier que p'. 4° En ne faiſant varier que q', & ainſi de ſuite.

Or la différence de tout ce ſecond membre, en ne faiſant varier que x, eſt $\frac{ddB}{dx^2}p\,dx + \frac{ddB}{dxdy}p'dx + \frac{ddB}{dxdp'}q'dx + \frac{ddB}{dxdq'}r'dx + \frac{ddB}{dxdr'}s'dx + \&c. = (\frac{ddB}{dx^2}p + \frac{ddB}{dxdy}p' + \frac{ddB}{dxdp'}q' + \frac{ddB}{dxdq'}r' + \frac{ddB}{dxdr'}s' + \&c.) dx$. De même la différence de tout le ſecond membre priſe, comme nous l'avons dit, en ne faiſant varier que y, eſt $\frac{ddB}{dydx}p\,dy + \frac{ddB}{dy^2}p'dy + \frac{ddB}{dydp'}q'dy + \frac{ddB}{dydq'}r'dy$

$+\frac{ddB}{dydr'}s'dy + \&c. = \left(\frac{ddB}{dydx}p + \frac{ddB}{dy^2}p' + \frac{ddB}{dydp'}q' + \frac{ddB}{dydq'}r' + \frac{ddB}{dydr'}s' + \&c.\right)dy$. La différence du second membre prise, comme nous l'avons dit, en ne faisant varier que p', est $\frac{ddB}{dp'dx}p\,dp' + \frac{ddB}{dp'dy}p'dp' + \frac{dB}{dy}dp' + \frac{ddB}{dp'^2}q'dp' + \frac{ddB}{dp'dq'}r'dp' + \frac{ddB}{dp'dr'}s'dp' + \&c. = \frac{dB}{dy}dp' + \frac{ddB}{dp'dx}p\,dp' + \frac{ddB}{dp'dy}p'dp' + \frac{ddB}{dp'^2}q'dp' + \frac{ddB}{dp'dq'}r'dp' + \frac{ddB}{dp'dr'}s'dp' + \&c. = \left(\frac{dB}{dy} + \frac{ddB}{dp'dx}p + \frac{ddB}{dp'dy}p' + \frac{ddB}{dp'^2}q' + \frac{ddB}{dp'dq'}r' + \frac{ddB}{dp'dr'}s' + \&c.\right)dp'$; & on trouve de même les autres différences du second membre, en ne faisant varier que q', ensuite en ne faisant varier que r', &c. Or $d.\frac{dB}{dx}$, ou la différence de $\frac{dB}{dx}$ prise en faisant tout varier, est $\frac{ddB}{dx^2}dx + \frac{ddB}{dxdy}dy + \frac{ddB}{dxdp'}dp' + \frac{ddB}{dxdq'}dq' + \frac{ddB}{dxdr'}dr' + \frac{ddB}{dxds'}ds' + \&c. = \frac{ddB}{dx^2}p + \frac{ddB}{dxdy}p' + \frac{ddB}{dxdp'}q' + \frac{ddB}{dxdq'}r' + \frac{ddB}{dxdr'}s' + \&c.$; par consequent $d\frac{dB}{dx}\cdot dx = \left(\frac{ddB}{dx^2}p + \frac{ddB}{dxdy}p' + \frac{ddB}{dxdp'}q' + \frac{ddB}{dxdq'}r' + \frac{ddB}{dxdr'}s' + \&c.\right)dx$. On

trouve de même que $d\frac{dB}{dy}\cdot dy = (\frac{ddB}{dydx}p + \frac{ddB}{dy^2}p' + \frac{ddB}{dydp'}q' + \frac{ddB}{dydq'}r' + \frac{ddB}{dydr'}s' + \&c.)dy$, & encore que $(\frac{dB}{dy} + d.\frac{dB}{dp'})dp' = (\frac{dB}{dy} + \frac{ddB}{dp'dx}p + \frac{ddB}{dp'dy}p' + \frac{ddB}{dp'^2}q' + \frac{ddB}{dp'dq'}r' + \frac{ddB}{dp'dr'}s' + \&c.)d'p$, & encore que $(\frac{dB}{dp'} + d.\frac{dB}{dq'})dq' = (\frac{dB}{dp'} + \frac{ddB}{dq'dx}p + \frac{ddB}{dq'dy}p' + \frac{ddB}{dq'dp'}q' + \frac{ddB}{dq'^2}r' + \frac{ddB}{dq'dr'}s' + \&c.)dq'$, & ainſi de ſuite.

Donc en mettant pour les ſuites qui multiplient les dx, dy, dp', dq', dr', ds', &c. leurs valeurs $d.\frac{dB}{dx}$ $d\frac{dB}{dy}$, $\frac{dB}{dy} + d.\frac{dB}{dp'}$, $\frac{dB}{dp'} + d.\frac{dB}{dq'}$, $\frac{dB}{dq'} + d\frac{dB}{dr'}$, $\frac{dB}{dr'}$ &c. Dans l'equation cy-deſſus (G), on aura $d(\frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dp'}q' + \frac{dB}{dq'}r' + \frac{dB}{dr'}s' + \&c.) = d\frac{dB}{dx}\cdot dx + d\frac{dB}{dy}\cdot dy + (\frac{dB}{dy} + d\frac{dB}{dp'})dp' + (\frac{dB}{dp'} + d\frac{dB}{dq'})dq' + (\frac{dB}{dq'} + d\frac{dB}{dr'})dr' + (\frac{dB}{dr'} \cdots\cdots\cdots)ds' + \&c.$ Mais puiſque V, & $\frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dp}q' + \frac{dB}{dq'}r' + \frac{dB}{dr'}s' + \&c.$ doivent être une même choſe, leurs différences

doivent être egales terme a terme, on aura donc $Ndx = d\frac{dB}{dx}dx$, & $N = d\frac{dB}{dx}$; $N'dy = d\frac{dB}{dy}\cdot dy$, & $N' = d\cdot\frac{dB}{dy}$; $P'dp' = (\frac{dB}{dy} + d\cdot\frac{dB}{dp'})dp'$, & $P' = \frac{dB}{dy} + d\cdot\frac{dB}{dp'}$; $Q' = \frac{dB}{dp'} + d\cdot\frac{dB}{dq'}$; $R' = \frac{dB}{dq'} + d\cdot\frac{dB}{dr'}$; $S' = \frac{dB}{dr'} + \cdots\cdots\cdots$; equations qui donnent les valeurs, que doivent avoir N, N', P', Q', R', S', &c., pour que V ſoit la différentielle exacte de B. On remarque maintenant que dans cette ſuite d'equations

$$N' = d\cdot\frac{dB}{dy}$$

$$P' = \frac{dB}{dy} + d\cdot\frac{dB}{dp'}$$

$$Q' = \frac{dB}{dp'} + d\cdot\frac{dB}{dq'}$$

$$R' = \frac{dB}{dq'} + d\cdot\frac{dB}{dr'}$$

$$S' = \frac{dB}{dr'} + \cdots\cdots$$

Le ſecond membre de la premiere, & de la derniere ne peuvent avoir qu'un terme, & qu'ainſi chaque $\frac{dB}{dy}$, $\frac{dB}{dp'}$, $\frac{dB}{dq'}$, $\frac{dB}{dr'}$ ſe trouve dans une equation, & ſa différence dans une autre. Mettant donc ces equations ſous cette forme

$N' = d \cdot \frac{dB}{dy}$

$dP' = d \cdot \frac{dB}{dy} + d^2 \cdot \frac{dB}{dp'}$,

$d^2 Q' = d^2 \cdot \frac{dB}{dp'} + d^3 \cdot \frac{dB}{dq'}$

$d^3 R' = d^3 \cdot \frac{dB}{dq'} + d^4 \cdot \frac{dB}{dr'}$

$d^4 S' = d^4 \cdot \frac{dB}{dr'} + \ldots\ldots\ldots$

on aura, en retranchant alternativement l'une de l'autre $N' - dP' + d^2 Q' - d^3 R' + d^4 S' - \&c. = o$, equation identique, qui doit avoir lieu, pour que V ſoit la différentielle exacte d'une fonction d'un ordre inférieur d'une unité, & qui eſt par conſequent l'equation de condition cherchée.

DCXIX.

Corollaire. Zdx eſt une différentielle, dans laquelle dx eſt conſtante, & Z une fonction des variables x, y, p, q, r, s, &c., en ſuppoſant $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx} = \frac{ddy}{dx^2}$, $r = \frac{dq}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$, $s = \frac{dr}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4}$, &c. Par conſequent $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \&c.$ Nous avons demontré dans le

Chapitre precedent que, si la relation entre x & y est exprimée par l'equation $N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}$ $-$ &c. $=o$, l'intégrale $S.Zdx$ sera un *Maximum*, ou un *Minimum*, or si on suppose $p'=dy$, $q'=dp'=ddy$, $r'=dq'=d^3y$, $s'=dr'=d^4y$, &c., Z sera aussi une fonction des variables x, y, p', q', r', s', &c., puisque les quantités p, q, r, s, &c. ne sont variables que par ce qu'elles contiennent dy, ddy, d^3y, d^4y, &c., ou p', q', r', s', &c., dx etant constante; par consequent on aura aussi $dZ=Mdx+N'dy+P'dp'+Q'dq'+R'dr+S'ds'+$ &c.

En egalant terme a terme les deux valeurs de dZ, que nous venons de trouver, on aura $Mdx=Mdx$, $M=M$, $Ndy=N'dy$, & $N=N'$; $Pdp=P\frac{dy}{dx}=P'dp'=P'dy$, & $P'=\frac{P}{dx}$; $\frac{dP}{dx}=dP'$; $Qdq=\frac{Qd^2y}{dx^2}=Q'dq'=Q'd^2y$, & $\frac{Q}{dx^2}=Q'$, $\frac{ddQ}{dx^2}=ddQ'$. On trouve de même $\frac{R}{dx^3}=R'$, & $\frac{d^3R}{dx^3}=d^3R'$; $\frac{S}{dx^4}=s'$, & $\frac{d^4S}{dx^4}=d^4S'$, &c. Substituant ces valeurs dans l'equation $N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}-$ &c. $=o$,

qui rend $S.Zdx$ un *Maximum*, ou un *Minimum*, on aura $N' - dP' + d^2Q' - d^3R' + d^4S' - \&c. = o$, equation de condition, qui doit avoir lieu, pour que la différentielle Zdx ait une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur. On voit donc par là, que ces deux formules d'equations ſont les mêmes. Ce Corollaire contient la demonſtration du Theoreme, que M.r Euler a propoſé ſans demonſtration dans le Tome X. des nouveaux Memoires de Petersbourg, & qu'il appelle: *Egregium Theorema quod in Calculo Integrali eximium uſum præſtare videtur*. M.r de Condorcet a fait voir generalement par la methode des variations, que les formules des equations de condition doivent être les mêmes que celles des equations, qui doivent avoir lieu entre les variables, qui entrent dans une fonction intégrale, pour que cette fonction devienne un *Maximum*, ou un *Minimum*. Il faut cependant remarquer que, pour le *Maximum*, ou le *Minimum*, ces equations ne doivent pas être identiques, puiſqu'elles doivent donner une relation entre les variables, qui eſt neceſſaire pour que la fonction intégrale indefinie devienne un *Maximum*, ou un *Minimum*. Ce que nous venons de demontrer peut ſuffire aux Commençants pour comprendre toute la premiere ſection du Calcul Intégral de M.r de Condorcet.

DCXX.

Quant a la feconde fection, l'Auteur propofe la methode d'intégrer toutes les equations différentielles, qui peuvent avoir des intégrales finies; cette methode eft expliqueé en 35. ou 36. pages. Il faudroit un long Commentaire pour eclaircir les difficultés, qu'on y trouve prefqu'a chaque pas, & pour demontrer exactement tout ce qu'on y fuppofe fans demonftration. Nous nous contenterons de donner un idée generale de cette fection, d'autant plus que dans le cours de cet Ouvrage nous avons donné des methodes, qui nous paroiffent avoir la même generalité que celle, qui eft renfermée dans cette fection.

Une equation différentielle quelconque, qu'on a reconnû par la premiere fection avoir une intégrale finie, etant propofée, M.r de Condorcet la prepare d'abord de maniere qu'elle devienne algebrique, rationelle & entiere, comme nous avons dit cy-deffus. Enfuite il remarque les points, qui diftinguent cette equation différentielle de toute autre. Ces points font l'ordre de l'equation, le nombre & la nature des fonctions tranfcendantes qui s'y trouvent, le degré où y montent les différences, & celui des equations rationelles entre les fimples variables x, y, &c., & les lettres, qui reprefentent leurs fonctions algebriques, &

tran-

tranſcendantes, le degré où montent les x, y, &c., & les lettres, qui repreſentent leurs fonctions dans les coefficients des différentielles, & dans les coefficients des equations rationelles & entieres entre x, y, &c., & les lettres qui repreſentent leurs fonctions, enfin les coefficients conſtants.

De ces points diſtinctifs de l'equation différentielle propoſée, il determine les points qui diſtinguent l'intégrale de cette equation de toute autre equation finie, & il trouve un nombre fini de formules d'intégrales finies, qui renferment neceſſairement celle de la propoſée. Après avoir trouvé les différentes formes dont eſt ſuſceptible l'intégrale finie d'une equation différentielle d'une forme donnée, il ne reſte plus qu'a determiner entre ces formes d'intégrales, celle qui convient aux coefficients donnés de la propoſée, & les coefficients de l'intégrale qui en reſultent. Pour cela différentiant chaque forme d'intégrale, & la reduiſant a la forme de la propoſée, on aura une fonction, qui devra être identiquement la même que la propoſée; comparant donc terme a terme on trouvera les coefficients de l'intégrale, &c. Mais, comme le remarquent M.rs d'Alembert, & Bezout, ce n'eſt que par la lecture de l'Ouvrage même, qu'ou peut ſe former une idée ſuffiſante de l'etenduë de ces methodes. Il nous ſuffit de dire qu'elles s'appliquent a toute equation différentielle.

Il faut cependant avoüer, que cette methode, & toutes les autres sont sujettes a des inconveniens inevitables. Les Tables construites selon les principes de M.r de Condorcet contiennent par ordre les différentes formes d'intégrales, qui etant différentiées, produisent les equations différentielles d'une forme donnée. Tel est le principe sur lequel ces Tables sont construites, & elles sont generales a cet egard. Mais si nous donnons des valeurs particulieres aux coefficiens de ces formules, qu'on a supposé generaux, il peut arriver que les différentielles, qui en resultent, soient susceptibles d'abbaissement, sans que les intégrales changent de forme, comme nous l'avons observé plusieurs fois; & cela arrivera soit que les coefficients des termes plus elevés s'evanoüissent, soit que ces différentielles ayent des facteurs, alors les différentielles d'un degré donné pourroient avoir pour intégrales, ou les intégrales generales de ce degré, ou des cas particuliers d'intégrales supérieures, dans lesquelles l'abbaissement auroit lieu. Il faudroit donc, pour avoir les intégrales de cette derniere classe d'equations, former une Table, qui contient tous ces cas particuliers; d'où l'on voit que cette methode est sujette aux inconvenients que nous avons deja observé dans les autres, & qui dependent de la nature même du calcul; c'est a dire, que les intégrales peuvent appartenir a des formules moins, ou plus

compliquées. Ce dernier cas appartient aux différentielles, qui auroient un facteur. Il est vrai, que la methode proposée satisferoit a tous les cas possibles; mais la construction des Tables seroit d'un travail immense. C'est pourquoi nous finirons en remarquant que les methodes generales du Calcul Intégral, qu'on a trouvées, ne diminuent point l'utilité des methodes particulieres, que nous devons aux travaux reunis des grands Géometres M.rs Newton, Bernoulli, Euler, d'Alembert, Clairaut, de la Grange, &c., comme M.r de Condorcet l'avoüe lui-même dans la conclusion generale, qu'il a mis a la fin de son Calcul Intégral en ces termes: *La methode d'intégrer, que je donne dans cet Ouvrage, joint au merite d'être directe, celui de la plus grande generalité qui en est une suite. Mais le defaut d'exiger beaucoup de calcul & de travail, aussi longtems surtout qu'il n'y aura pas de Tables d'intégrales toutes dressées, fait que jusques-là elle ne peut gueres être d'usage que pour les cas, qui ont echappé aux methodes particulieres.*

Fin de la seconde Partie.

Planche VIII. Pag. 588.

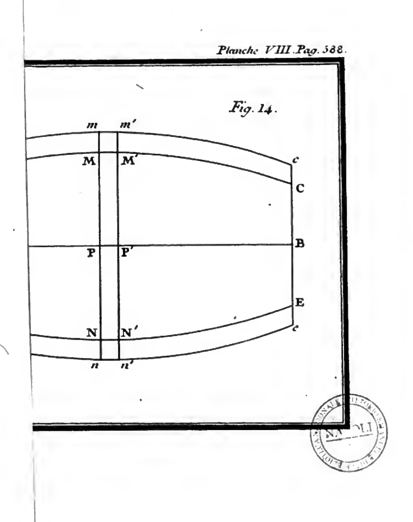


TABLE
DES CHAPITRES
Contenûs dans cette Seconde Partie.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

Fin de la Table des Chapitres.



